VARIABLES ALÉATOIRES

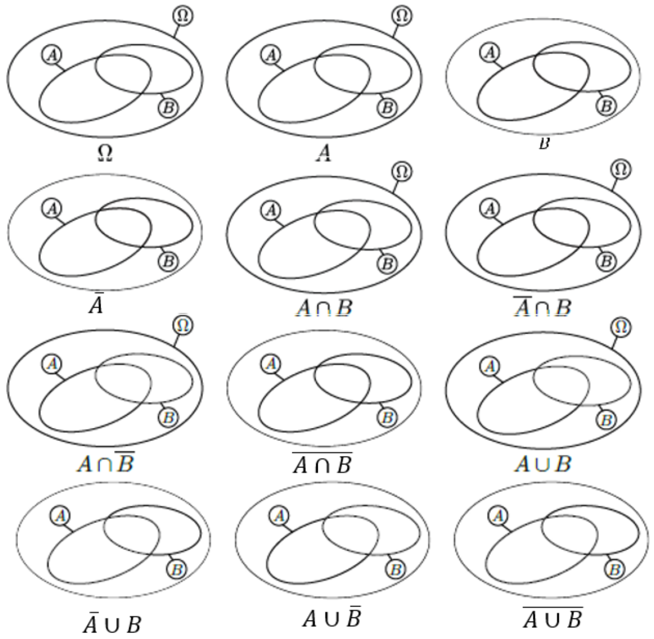
Partie 1 : Variable aléatoire et loi de probabilité

Retour sur les bases :

Exercice 1

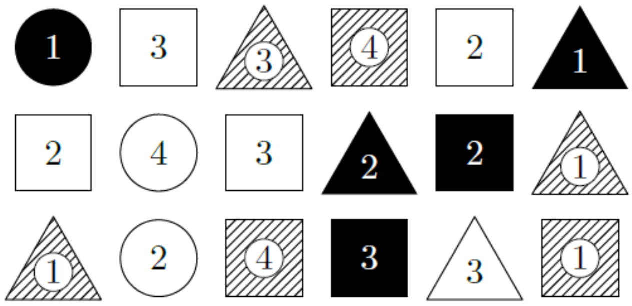
Ci-dessous sont représentés l'univers Ω d'une expérience aléatoire et deux événements A et B de Ω. Pour chacune des représentations ci-dessous, hachurer l'ensemble demandé.

Donner, sans justification, une expression simplifiée des ensembles :



Exercice 2

Une urne contient 18 pièces de bois de formes, de couleurs et portant des numéros différents.



On tire au hasard un élément de cette urne. On suppose que le tirage s'effectue de manière équiprobable.

On considère les événements suivants :

A: *"la pièce est un triangle"*

B : *"la pièce est de couleur blanche"*

C : *"la pièce porte le numéro 2"*

D: *"la pièce n'est pas un cercle"*

E : *"la pièce porte un numéro pair"*

Sans justification, donner la probabilité des événements suivants :

a) $\bar{A}$ b) $A \cap C$ c) $(C \cap B) \cup A$

d) $\overline{A \cap C}$ e) $\bar{A} \cap \bar{D}$ f) $(A \cap E) \cup (C \cap D)$

g) $C \cap \bar{E}$ h) $C \cup D$ i) $\bar{A} \cup \bar{C}$

Exercice 3

On considère une urne contenant 11 boules contenant des surprises. Certaines sont rondes, d'autres carrés. Certaines sont blanches, d'autres sont rayés. Elles sont représentées ci-dessous :

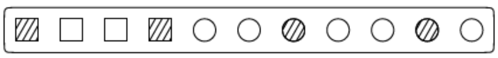
On suppose qu'en appuyant sur un bouton, les boules sortent au hasard de l'urne. On vient de constituer une expérience aléatoire suivant la loi d'équiprobabilité.

On associe un gain à chacune des surprises de la manière suivante :

- Une boule rapporte 1€ alors qu'un carré rapporte 2€.
- De plus, si la surprise est rayé, le gain est augmenté de 1€.

Cette association d'une valeur à chaque événement élémentaire constitue une variable aléatoire. Notons-la X.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable X lorsque le contenu des boules de l'urne est représenté ci-dessous :



2) Déterminer la loi de probabilité de la variable X lorsque le contenu des boules de l'urne est représenté ci-dessous :

1) Variable aléatoire

Exemple : Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »

L'ensemble de toutes les issues possibles E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :

Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €. Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.

Pour les issues 5 et 6, on a : X = 2 Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : X = –1.

Définition : Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers des possibles.

Méthode 1 : Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.

Soit X la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.
Calculer : $P(X = 5)$, $P(X = -1)$ et $P(X \leq 2)$.

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Remarque : Les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X.

Méthode 2 : Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.
Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.
Établir la loi de probabilité de X.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs entières de 1 à 6 et dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

1) Compléter le tableau de la loi de probabilité de X.

2) Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X \leq 3)$ b) $P(X > 3)$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,05	0,12	0,15	0,23	0,17	

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-contre :

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
$P(X = x_i)$	*0,15*	*0,24*	*0,35*	*0,26*

1 Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.

2 Déterminer les probabilités suivantes : a) $P(X \geq 2)$ b) $P(X < 2)$ c) $P(\{X = 1\} \cup \{X = 3\})$

Partie 2 : Espérance, variance, écart-type

Définitions : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

- L'**espérance** de X est : $E(X) = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \ldots + p_n\, x_n$
- La **variance** de X est : $V(X) = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \ldots + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2$
- L'**écart-type** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Méthode 3 : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Si on tire un cœur, on gagne 2 €./ Si on tire un roi on gagne 5 € / Si on tire une autre carte, on perd 1 €
X est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.
1) Calculer l'espérance de X.
2) Donner une interprétation du résultat.
3) Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 6 :

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.
On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $E(X)$.

Exercice 7 : Loterie

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €.
On achète un billet au hasard.
X est la variable aléatoire, définie sur Ω, égale au gain algébrique procuré par le billet.
1) Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?
4) L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre *x*, avec *x* compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer *x*.

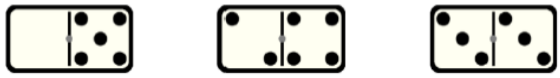
Exercice 8

Un club de natation propose à ses adhérents trois types d'activités : la compétition C, le loisir L et l'aquagym A. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule de ces activités.
Voici la répartition des adhérents suivant l'activité choisie : • L : 30 % • A : 20 % • C : 50 %
L'adhésion à la section L ou à la section A coûte 60 € tandis que l'adhésion à la section C revient à 100 € pour l'année. En outre, le club organise chaque année une journée de rencontre, notée R, pour laquelle une participation de *x* euros par participant est demandée. Un tiers des adhérents de L, un quart de ceux de A et la moitié de ceux de C participent à cette journée. $(0 < x < 40)$

1) Compléter le tableau suivant en inscrivant les pourcentages qui conviennent.

	L	A	C	Total
R				
$\overline{R}$				
Total				100

2) On interroge au hasard un membre du club. On appelle S la variable aléatoire qui à chaque adhérent associe le montant annuel à verser au club (cotisation plus participation éventuelle à la rencontre).
   a) Quelles sont les valeurs prises par S?
   b) Indiquer la loi de probabilité de S en fonction de x.
   c) Calculer E(S) en fonction de x.
   d) A quel prix le directeur du club doit-il fixer la participation à la journée de rencontre s'il veut que le coût moyen par adhérent ne dépasse pas 90 €.



Exercice 9

Dans un jeu de dominos, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.

1) Prouvez que le nombre de dominos est 28.

2) Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3?

3) X est la variable aléatoire prenant la valeur −1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur *n* lorsqu'il obtient le double « {*n*, *n*} ».

a) Quelle est la loi de probabilité de X?

b) Calculez E(X).

c) Calculer la variance et l'écart-type de X.

Propriétés de linéarité (non exigible) :
Soit une variable aléatoire X. Soit a et b deux nombres réels. On a :
$E(aX+b) = aE(X)+b$ $\quad\quad$ $V(aX+b) = a^2V(X)$

Méthode 4 : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Exercice 10

Soit une variable aléatoire X telle que $E(X) = 15$ et $V(X) = 9$.

1) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y définie par : $Y = \frac{1}{3}X + 5$
2) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z définie par : $Z = 4(X-5)$

Exercice 11

Les températures en (°C) relevées dans 15 villes différentes sont les suivantes :
25 28 26 28 30 32 25 27 28 30 31 32 26 31 33
Soit X la variable aléatoire qui donne la température en °C d'un ville choisie au hasard parmi les 15.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer l'espérance l'écart-type des températures.
3) Soit F la variable donnant la température en °F d'un ville choisie au hasard parmi les 15.
   a. Chercher la formule de conversion de °C en °F
   b. En déduire $E(F), V(F)$ et $\sigma(F)$