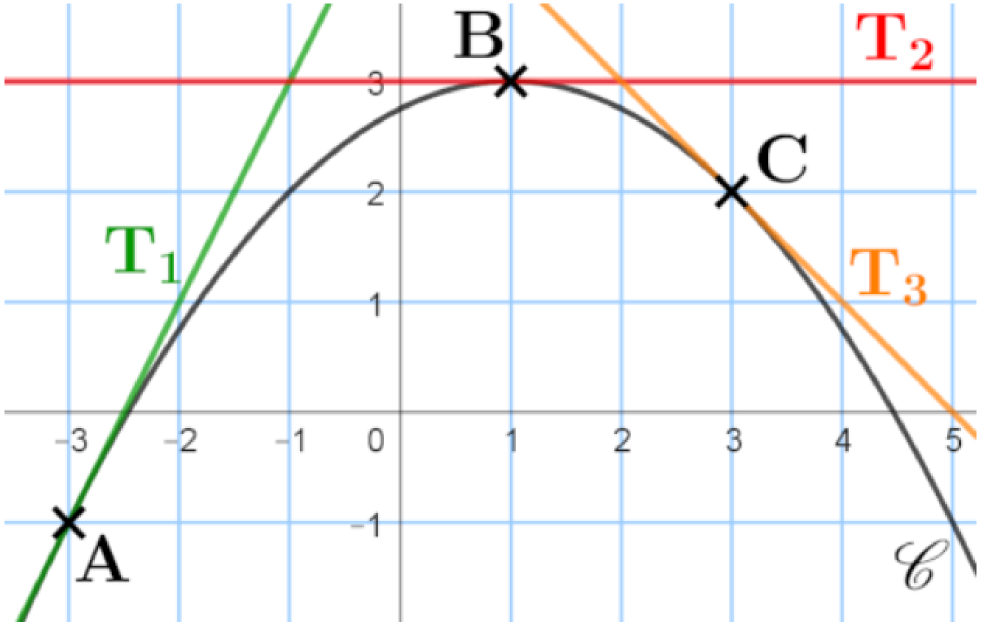
Entrainement
dérivée en un point et probabilités conditionnelles

Exercice 1

Sur la figure ci-dessous on peut voir la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f.



1) Lire sur la figure ci-contre les valeurs suivantes :

   $f(-3) =$.................... $f(1) =$.................... $f(3) =$....................

   $f'(-3) =$.................... $f'(1) =$.................... $f'(3) =$....................

2) Sans justifier donne l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $a = 1$
3) A l'aide de la formule du cours déduire de la question 1 les équations des deux autres tangentes.

Exercice 2

Résoudre l'inéquation : $|2x - 5| > 4$ $\quad (I_1)$

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{4\}$ par $g(x) = \frac{-6}{2x-8}$

1) g est elle dérivable en 2, si oui en déduire $g'(2)$
2) Donner le domaine de définition de la fonction h qui associe à chaque x de son domaine le réel $\sqrt{3x+7}$
3) Prouver que le taux de variation de h entre $3 + h$ et h vaut $\frac{\sqrt{16+3h}-4}{h}$
4) h est elle dérivable en 2 et si oui donner $h'(2)$

Exercice 4

L'entreprise possède deux ateliers de production des tubes : atelier 1 et atelier 2.

- L'atelier 1 produit 30% des tubes.
  - Parmi eux, 1,5% présentent un défaut.
- L'atelier 2 produit 70% des tubes.
  - Parmi eux, 2,5% présentent un défaut.

On prélève au hasard un tube parmi la production totale de l'usine. On définit les évènements suivants :

- A_1 : « le tube provient de l'atelier 1 »;
- A_2 : « le tube provient de l'atelier 2 »;
- D : « le tube présente un défaut ».

1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité $P\,(A_1 \cap D)$.

3. Montrer que $P(D) = 0{,}022$.

4. On sait que le tube ne présente pas de défaut. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2 ?

Correction

Exercice 1

1) $f(-3) = -1 \quad f(1) = 3 \quad f(3) = 2$

$f'(-3) = 2 \quad f'(1) = 0 \quad f'(3) = -1$

2) (T_2) la tangente à $\mathcal{C}$ en $a = 1$ a pour équation $y = 3$
3) $T_{-3}: y = f'(-3)\big(x-(-3)\big) + f(-3) \Leftrightarrow y = 2(x+3) - 1$
$\Leftrightarrow y = 2x + 5$
$T_3: y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow y = -1(x-3) + 2$
$\Leftrightarrow y = -x + 5$

Exercice 2

Résoudre l'inéquation : $|2x-5| > 4$

$2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ Ainsi sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$

$(I_1) \Leftrightarrow 2x-5 > 4 \Leftrightarrow 2x > 5+4 \Leftrightarrow x > \frac{9}{2} \Leftrightarrow x \in]\frac{9}{2}; +\infty[$

Toutes ces solutions sont dans $[\frac{5}{2}; +\infty[$ donc elles sont acceptables.

$2x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$ Ainsi sur $]-\infty; \frac{5}{2}[$

$(I_1) \Leftrightarrow -(2x-5) > 4 \Leftrightarrow -2x > -5+4 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 1/2]$

Toutes ces solutions sont dans $]-\infty; \frac{5}{2}]$ donc elles sont acceptables.

Ainsi $S =]-\infty; 1/2[\cup]\frac{9}{2}; +\infty[$

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{4\}$ par $g(x) = \frac{-6}{2x-8}$

1) g est elle dérivable en 2, si oui en déduire $g'(2)$

$g(2) = \frac{-6}{4-8} = \frac{3}{2} \qquad g(2+h) = \frac{-6}{2(2+h)-8} = \frac{-6}{2h-4}$

$\lim_{h\to 0} \frac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-6}{2h-4} - \frac{3}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-6\times 2}{(2h-4)\times 2} - \frac{3(2h-4)}{2(2h-4)}\right)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-12-6h+12}{h2(2h-4)} = \lim_{h\to 0} \frac{-6h}{h2(2h-4)} = \lim_{h\to 0} \frac{-6}{2(2h-4)} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$

Ainsi g est dérivable en 2 et $g'(2) = \frac{3}{4}$

2) Donner le domaine de définition de la fonction h qui associe à chaque x de son domaine le réel $\sqrt{3x+7}$

$\sqrt{3x+7}$ est définie si $3x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{3}$ ainsi

$D_h = [-\frac{7}{3}; +\infty[$

3) h est elle dérivable en 3 et si oui donner $h'(3)$

$h(3) = \sqrt{3\times 3+7} = \sqrt{16} = 4$

$h(3+h) = \sqrt{3(3+h)+7} = \sqrt{16+3h}$

$\frac{h(3+h)-h(3)}{h} = \frac{\sqrt{16+3h}-4}{h}$

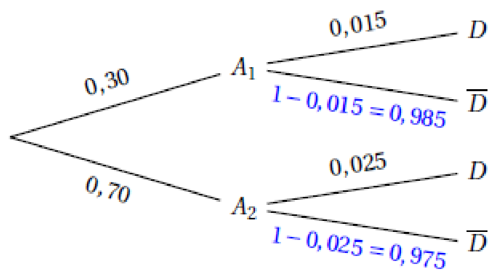
4) $\frac{\sqrt{16+3h}-4}{h} = \frac{(\sqrt{16+3h}-4)(\sqrt{16+3h}+4)}{h(\sqrt{16+3h}+4)} = \frac{\left(\sqrt{16+3h}^2 - 4^2\right)}{h(\sqrt{16+3h}+4)} = \frac{16+3h-16}{h(\sqrt{16+3h}+4)} =$
$\frac{3h}{h(\sqrt{16+3h}+4)} = \frac{3}{(\sqrt{16+3h}+4)}$

Ainsi $\lim_{h\to 0} \frac{h(3+h)-h(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3}{(\sqrt{16+3h}+4)} = \frac{3}{4+4} = \frac{3}{8}$

Ainsi h est dérivable en 3 et $h'(3) = \frac{3}{8}$

Exercice 4

1. On réalise un arbre pondéré décrivant la situation.



2. $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) = 0{,}0045 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$

4. On sait que le tube ne présente pas de défaut.

La probabilité qu'il provienne de l'atelier 2 est :

$P_{\overline{D}}(A_2) = \frac{P\left(A_2 \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0{,}70 \times 0{,}975}{1 - 0{,}022} \approx 0{,}698$