DÉRIVATION ½ Corrections

Méthode 1 : Démontrer qu'une fonction est dérivable

Vidéo https://youtu.be/UmT0Gov6yyE

Vidéo https://youtu.be/Iv5_mw1EYBE

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

Correction

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$= \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-2^2-2\times2+3}{h}$$
$$= \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$$
$$= \frac{6h+h^2}{h}$$
$$= \frac{h(6+h)}{h}$$
$$= 6 + h$$

Donc : $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to0} 6 + h = 6 + 0 = 6$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$.
Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$.

Exercice 1

1.

$f(x) = -4x + 3 \qquad a = 3$

Version avec la limite quand x tend vers 3

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{(-4x+3)-(-4\times3+3)}{x-3} = \frac{-4x+3+12-3}{x-3} = \frac{-4x+12}{x-3} = \frac{-4(x-3)}{(x-3)} = -4$$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to3} -4 = -4$ ainsi $f'(3) = -4$

Version avec la limite de h en 0

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{-4(3+h)+3-(-4\times3+3)}{h} = \frac{-12-4h+3-(-9)}{h} = \frac{-12-4h+3-(-9)}{h} = -\frac{4h}{h} = -4$$

$\lim\limits_{h\to0} \frac{f(h+3)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0} -4 = -4$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = -4$

La version avec h est un poil plus longue

2.

$f(x) = x^2 - 5x + 3 \quad a = 5$

Version avec la limite quand x tend vers 5

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\frac{(x^2-5x+3)-(5^2-5\times5+3)}{x-5}=\frac{x^2-5x+3-3}{x-5}=\frac{x^2-5x}{x-5}=\frac{x(x-5)}{(x-5)}=x$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to5}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to5}x\ =5$ ainsi $f'(5)=5$

Version avec la limite de h en 0

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{(5+h)^2-5(5+h)+3-(5^2-5\times5+3)}{h}=\frac{25+10h+h^2-25-5h+3-3}{h}=\frac{10h+h^2-5h}{h}$

$=\frac{h(5+h)}{h}=5+h$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h+5)-f(5)}{h}=\lim\limits_{h\to0}5+h=5$ donc f est dérivable en 5 et $f'(5)=5$

La version avec h est un poil plus longue

3.

$f(x)=x^3+1$ $\quad a=1$

Version avec la limite quand x tend vers 1

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x^3+1)-(1^3+1)}{x-1}=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$ (factorisation connue par cœur ou difficile à faire rapidement)

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to1}x^2+x+1\ =3$ ainsi $f'(1)=3$

Version avec la limite de h en 0

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^3+1-(1^3+1)}{h}=\frac{1+3h+3h^2+h^3+1-2}{h}=\frac{h(3+3h+h^2)}{h}=3+3h+h^2$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}3+3h+h^2=3$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=3$

Plus facile à faire surtout si on connait la formule $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

4.

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad a=-1$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{-1}}{x+1}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}{x+1}=\frac{\frac{1+x}{x}}{x+1}=\frac{1+x}{x}\div(x+1)=\frac{1+x}{x}\times\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x}\ =-1$ ainsi $f'(-1)=-1$

5.

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ $\quad a=3$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-3}}{x-3}=\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}}{x-3}=\frac{\frac{2}{2(1-x)}+\frac{(1-x)}{2(1-x)}}{x-3}=\frac{\frac{3-x}{2(1-x)}}{x-3}=\frac{3-x}{2(1-x)}\frac{1}{x-3}=\frac{-(x-3)}{2(1-x)(x-3)}=\frac{-1}{2(1-x)}$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to3}\frac{-1}{2(1-x)}\ =-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}$ ainsi $f'(3)=\frac{1}{4}$

Exercice 2

$t(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-\frac{1}{1^2}}{h}=\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-\frac{(1+h)^2}{(1+h)^2}}{h}=\frac{\frac{1-(1+h)^2}{(1+h)^2}}{h}=\frac{1-(1+h)^2}{(1+h)^2}\frac{1}{h}=\frac{[1-(1+h)][1+(1+h)]}{h(1+h)^2}$

$=\frac{[-h][2+h]}{h(1+h)^2}=\frac{-[2+h]}{(1+h)^2}=\frac{-2-h}{(1+h)^2}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ si on pose $h=x-1$ on aura $x=h+1$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-2-h}{(1+h)^2}=\frac{-2}{1}=-2$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-2$

Exercice 3

1. a.

$f(x)=\sqrt{x}+1 \qquad a=1$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{1}+1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}^2-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}$ ainsi $f'(1)=\frac{1}{2}$

b.

$f(x)=\frac{1}{3x} \qquad a=3$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\times 3}}{x-3}=\frac{\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}}{x-3}=\frac{\frac{1\times 3}{3x3}-\frac{1x}{9x}}{x-3}=\frac{\frac{3-1x}{9x}}{x-3}=\frac{-(x-3)}{9x}\times\frac{1}{x-3}=\frac{-1}{9x}$

Ainsi :

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-1}{9x}=-\frac{1}{27}$ ainsi $f'(3)=-\frac{1}{27}$

2.a.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Soit $x\neq 0$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}}{h}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}\times\frac{1}{h}$

$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x+h}^2}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

$=\frac{x-x-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{-1}{\sqrt{x+0}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+0})}=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}(2\sqrt{x})}=\frac{-\sqrt{x}}{x2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

Ainsi $f'(x)=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$

b.

$f(x)=\frac{x}{3x+1}$

Soit $x\neq -\frac{1}{3}$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{x+h}{3(x+h)+1}-\frac{x}{3x+1}}{h}=\frac{\frac{(x+h)(3x+1)}{(3x+3h+1)(3x+1)}-\frac{x(3x+3h+1)}{(3x+1)(3x+3h+1)}}{h}$

$=\frac{3x^2+x+3xh+h-(3x^2+3xh+x)}{(3x+3h+1)(3x+1)}\times\frac{1}{h}=\frac{3x^2+x+3xh+h-3x^2-3xh-x}{h(3x+3h+1)(3x+1)}$

$=\frac{h}{h(3x+3h+1)(3x+1)}=\frac{1}{(3x+3h+1)(3x+1)}$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{(3x+3h+1)(3x+1)}=\frac{1}{(3x+1)(3x+1)}=\frac{1}{(3x+1)^2}$

Ainsi $f'(x)=\frac{1}{(3x+1)^2}$

Méthode : Démontrer la non dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue

Vidéo https://youtu.be/ZKtxnTalvvs

Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Correction

Soit la fonction f définie par $f(x)=|x|$.

On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}\frac{h}{h}=1, & si\ h>0.\\ \frac{-h}{h}=-1, & si\ h<0\end{cases}$$

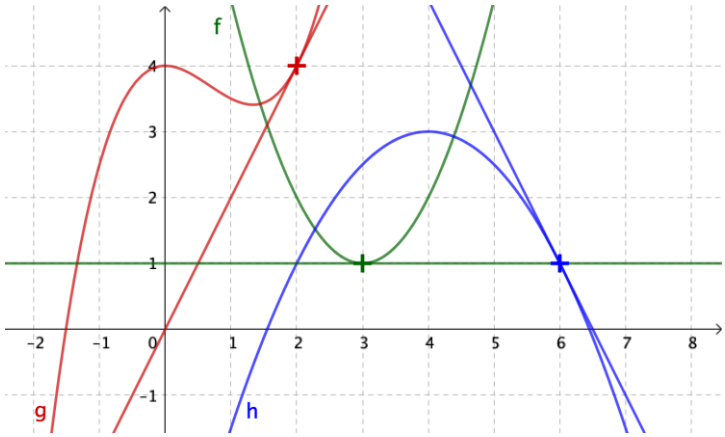
Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de h. La limite ne peut pas être égal à la fois à 1 et à -1.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.
En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.

<u>Remarque :</u> Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

Méthode : Déterminer graphiquement le nombre dérivé

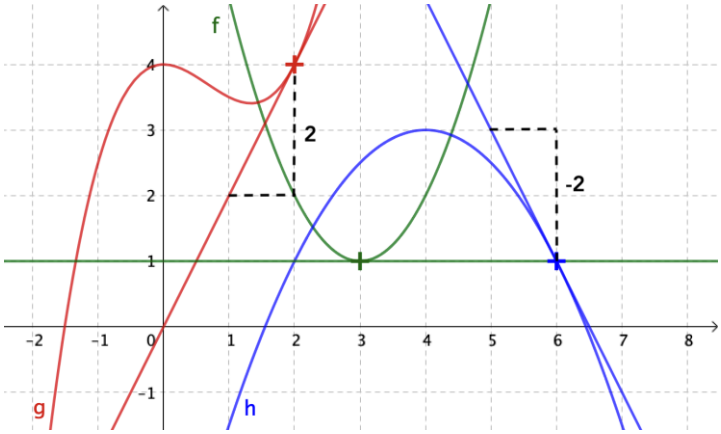
Vidéo https://youtu.be/f7AuwNAagAQ

a) On a représenté les fonctions f, g et h et trois tangentes dans un repère.
Lire graphiquement $f'(3)$, $g'(2)$ et $h'(6)$.
b) Tracer la tangente à la courbe de la fonction g en 1 tel que $g'(1) = -\frac{1}{2}$.

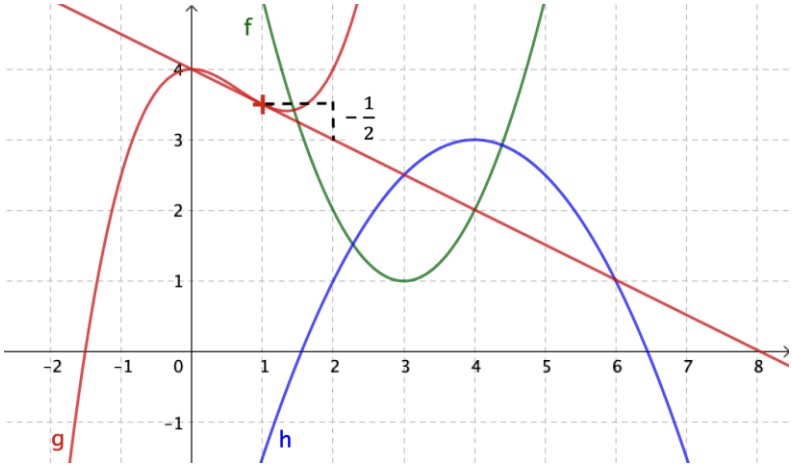


Correction

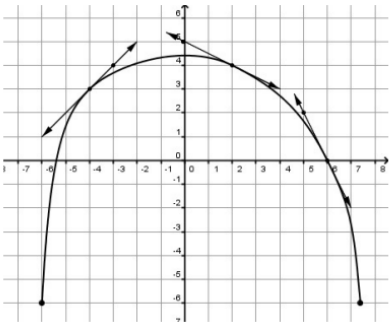
a) $f'(3) = 0$ en effet la tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc sa pente est nulle.
$g'(2) = 2$
$h'(6) = -2$

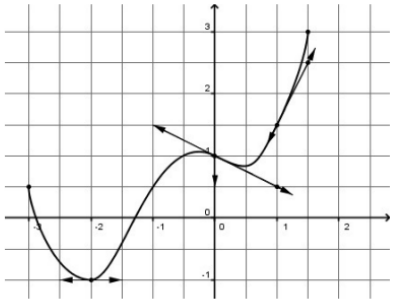


b)



Exercice 4





La courbe de gauche représente la fonction f et celle de droite la fonction g.

1) Lire, en vous servant du quadrillage les nombres suivants : $f(-4) = 3$; $f'(-4) = 1$; $f(2) = 4$; $f'(2) = \frac{-1}{2}$; $f(6) = 0$ et $f'(6) = \frac{-2}{1} = -2$
2) Lire, en vous servant du quadrillage les nombres suivants : $g(-2) = -1$; $g'(-2) = \frac{0}{2} = 0$; $g(0) = 1$; $g'(0) = \frac{-1}{2}$; $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g'(1) = \frac{2}{1}$

Exercice 5

$f(0) = 1$	$f(-2) = -1$	$f(1) = 1{,}5$
$f'(0) = -\frac{1}{2}$	$f'(-2) = 0$	$f'(1) = 2$

2) <u>Équation de la tangente</u>

<u>Propriété :</u> Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

<u>Démonstration au programme :</u>

Vidéo https://youtu.be/Jj0ql6-o2Uo

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme :
$y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.
Déterminons b :
La tangente passe par le point A$(a\,;f(a))$, donc :
$f(a) = f'(a) \times a + b$ soit : $b = f(a) - f'(a) \times a$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

<u>Méthode :</u> Déterminer l'équation d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/fKEGoo50Xmo **Vidéo** https://youtu.be/0jhxK55jONs
Vidéo https://youtu.be/7-z62dSkkTQ

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 2$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse $x = 1$.

Correction
Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

● On commence par calculer le nombre dérivé en 1, $f'(1)$:

$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-5(1+h)+2-(1^2-5\times1+2)}{h} = \frac{1+2h+h^2-5-5h+4}{h} = \frac{-3h+h^2}{h} = \frac{h(-3+h)}{h} = -3+h$

Donc : $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0} -3+h = -3+0 = -3$

Le nombre dérivé de f en 1 vaut -3 et on note : $f'(1) = -3$.

● On calcule $f(1)$:

$f(1) = 1^2 - 5\times1 + 2 = -2$

Une équation de la tangente en 1 est donc de la forme :

$y = -3(x-1) + (-2)$, soit :

$y = -3x + 3 - 2$

$y = -3x + 1$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 1 est $y = -3x + 1$.

Exercice 6

1) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$p = 2$ et donc la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = \frac{1}{2}x + 2$

2) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{1-0} = 0$

$p = 2$ et donc la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = 0x + 2$

3) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$

p et n'est pas lisible donc $y = \frac{3}{2}x + p$, utilisons le point de coordonné (1 ;2)

$2 = \frac{3}{2}\times1 + p \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} = p \Leftrightarrow \frac{1}{2} = p$

Ainsi la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

4) $y = mx + p$

$f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-2}{3-0} = \frac{-3}{3} = -1$

$p = 2$ ainsi la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = -1x + 2$

Exercice 7

1) $f'(-5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $f'(-4) = 0$

$f'(-2) = -6$ $\qquad$ $f'(4) = \frac{-3}{4}$

2) en $a = 4$ $\quad T_4: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $\quad \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}(x-4) + \left(-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x + 3 - \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}$

en $a = -2$ $\quad T_{-2}: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $\quad \Leftrightarrow y = -6\big(x-(-2)\big) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -6x - 12 + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y = -6x - \frac{23}{2}$