Contrôle – 1G spé Maths - Fonction exponentielle

Durée : 55 minutes
Calculatrice autorisée

Exercice 1 – Étude de fonction (9 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 1)e^{-1x} + 1$$

1. Calculer $f'(x)$ et factoriser le résultat.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. Encadrer à 10^{-2} près par balayage α l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 2 – Simplifications d'expressions (3 points)

1. Simplifier : $\frac{e^{3x} \times e^{-5x}}{e^{-x}}$
2. Simplifier : $(e^{2x+1})^2$
3. Simplifier : $\frac{2e^{x} - 5e^{-x}}{e^{-x}}$

Exercice 3 – Équations et inéquations (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x+3} > e$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{5x-2} < (e^{x})^2$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x^2-2} > e^{x}$

Exercice 4 – Dérivation (5 points)

1. Déterminer la dérivée de : $f(x) = e^{3x}$
2. Déterminer la dérivée de : $g(x) = (2x - 1)e^{x}$
3. Déterminer la dérivée de : $h(x) = \frac{e^{x^2}}{x+1}$

Correction détaillée et barème

Exercice 1

1. $f'(x) = e^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) = 1e^{-x} + (-x+1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$. (2 pts)

2. Comme $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2-x$. (1 pt)

f est croissante sur $]-\infty; 2]$ puis décroissante sur $[2; +\infty[$. Le maximum atteint en 2 est $f(2) = 1 + e^{-2} \approx 1{,}14$ (2 pts)

3. Utilisons la formule $T_a: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ donc la tangente est $y = 2x$. (1,5 pts)

4. Par balayage : on obtient $-0{,}39 \leq \alpha \leq -0{,}38 \approx 1{,}8$. (1,5 pts)

Exercice 2

1. $e^{3x-5x+x} = e^{-x}$ (1 pt) **2.** e^{4x+2} (1 pt) **3.** $2e^{2x} - 5$ (1 pt)

Exercice 3

1. $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (1 pt) **2.** $e^{x+3} > e \Leftrightarrow x + 3 > 1 \Leftrightarrow x > -2$. (1 pt)

3. $e^{5x-2} \leq e^{2x} \Leftrightarrow 5x - 2 \leq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$. (1 pt)

4. $e^{x^2-2} > e^x \Leftrightarrow x^2 - 2 > x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$ (2pts)

Racine évidente de $x^2 - x - 2$: -1

et donc l'autre racine x_2 vérifiera $-1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2 = 1 - \frac{-1}{1} \Leftrightarrow x_2 = 2$

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines donc $S =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 4

1. $(e^{3x})' = 3e^{3x}$ (1 pt)

2. On reconnait $uv \rightarrow u'v + uv'$ avec $u = 2x - 1$, $u' = 2$, $v = e^x$ et $v' = e^x$

Ainsi : $g'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$ (1,5 pt)

3. commençons par dériver e^{x^2}

on reconnait $e^u \rightarrow u'e^u$ avec $u = x^2$ et $u' = 2x$ ainsi $e^{x^2} \rightarrow 2xe^{x^2}$

Valeur interdite : -1 , donc sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ on reconnait :

$\frac{u}{v} \rightarrow \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$ avec $u = e^{x^2}$, $u = 2xe^{x^2}$, $v = x + 1$ et $v' = 1$

ainsi : $h'(x) = \frac{2xe^{x^2}(x+1) - e^{x^2}}{(x+1)^2} = \frac{(2x^2+2x-1)e^{x^2}}{(x+1)^2}$ (2,5 pts)