Entrainement interrogation 3

Exercice 1

Soit f et g deux fonctions qui a tout réel x associent
respectivement les réels $f(x) = x^2 - 4x - 10$ et $g(x) = x + 4$.

Etudier leurs positions relatives

Exercice 2

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{-1}{x-2}\right) - \left(\frac{5}{x+1}\right) < -3 \qquad (I_2)$

Exercice 3

Résoudre l'équation $\left(\frac{1}{x+2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+2}\right) - 6 = 0 \qquad (E_3)$

Correction

Exercice 1

Etudions le signe de $f(x)-g(x)$

$f(x)-g(x)=x^2-4x-10-(x+4)=x^2-4x-10-x-4=x^2-5x-14$

Je reconnais la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=-5$ et $c=-14$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(-14)=25+56=81>0$

Il y aura donc deux racines :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-\sqrt{81}}{2\times1}=\frac{5-9}{2}=-2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+\sqrt{81}}{2\times1}=7$

Ainsi on aura :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Positions relative		C_f audessus		C_g audessus		C_f audessus	

Exercice 2

$\left(\frac{-1}{x-2}\right)-\left(\frac{5}{x+1}\right)\leq-3\ (I_2)$

Recherche des valeurs interdites : $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Sur le domaine d'étude $D_e=\ \mathbb{R}-\{-1;2\}$ on aura $(I_2) \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{x-2}\right)-\left(\frac{5}{x+1}\right)+\frac{3}{1}<0$

$\Leftrightarrow \frac{-1(x+1)}{(x-2)(x+1)}-\frac{5(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\frac{3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{(x-2)(x+1)}-\frac{5x-10}{(x+1)(x-2)}+\frac{3x^2-3x-6}{(x+1)(x-2)}<0$

$\Leftrightarrow \frac{-x-1-5x+10+3x^2-3x-6}{(x-2)(x+1)}<0$ $\Leftrightarrow \frac{3x^2-9x+3}{(x-2)(x+1)}<0$

Etude du signe de $3x^2-9x+3$

Je reconnais la forme ax^2+bx+c avec $a=3$, $b=-9$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4\times3\times3=45>0$

Il y aura donc deux racines :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9-\sqrt{45}}{2\times3}=\frac{9-3\sqrt{5}}{2\times3}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx0{,}38$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx2{,}62$

x	$-\infty$		-1		x_1		2		x_2		$-\infty$
$3x^2-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Q		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi $S=[-1;\frac{3-\sqrt{5}}{2}[\cup]2;\frac{3+\sqrt{5}}{2}]$

Exercice 3

Recherche des valeurs interdites : $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Sur le domaine d'étude $D_e=\ \mathbb{R}-\{-2\}\ (E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} X^2-X-6=0\ \ (E_3') \\ X=\frac{1}{x+2} \end{cases}$

Résolution de (E_3') :

Je reconnais une équation de la forme $aX^2+bX+c=0$ avec $a=1$, $b=-1$ et $c=-6$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-6)=25>0$

On aura donc deux solutions $X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{25}}{2}=-2$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{25}}{2}=3$

Ainsi $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} X=-2\ ou\ X=3 \\ X=\frac{1}{x+2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x+2}=-2\ ou\ \frac{1}{x+2}=3 \Leftrightarrow 1=-2(x+2)$ ou $1=3(x+2)$

$\Leftrightarrow 1+4=-2x$ ou $1-6=3x \Leftrightarrow \frac{5}{-2}=x$ ou $\frac{-5}{3}=x$ ces deux valeurs étant dans D_e on les acceptera et donc $S=\left\{-\frac{5}{2};-\frac{5}{3}\right\}$

Remarque : vous avez peut-être remarqué que -2 l'une des solutions de l'équation (E_3') semblait problématique … mais c'est une illusion. x ne peut pas valoir 2, par contre X n'a pas une telle restriction.