Généralités sur les suites numériques

Exercice 1
Pour les deux suites suivantes dire à partir de quel rang elles sont définies et calculer leurs 3 premiers termes.

1. $u_n = \frac{5}{(n+3)(n-4)}$
2. $v_n = 5 + \sqrt{2n - 10}$

Exercice 2
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit v la suite définie par $\begin{cases} u_5 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$ Calculer ses trois premiers termes.
2. Soit w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = -2n^2 - 3$.
   Donner l'expression de w_{n-1} en fonction de n sous forme développée.

Exercice 3
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -n^2 + 6n - 9$.

1. On veut étudier les variations de u, tu as le choix entre deux voies :
   a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -2n + 5$ et en déduire les variations
   b. Etudier les variations de $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ et en déduire les variations de u.
2. Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \frac{1}{2n+1}$
3. Étudier le sens de variation de la suite (w_n) définie pour tout entier n par $w_n = 2 \times \frac{5^n}{3^n}$.

Exercice 4

1. Donner la définition de U (en fonction de n, ou par récurrence)
2. A quoi sert le programme ci-contre ?
3. Quelles sont les valeurs des variables U et n en fin de programme ?

```
U ← -2
n ← 0
Tant que U < 33
        U ← 4 + U
        n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher U et n
```

Exercice 5
Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$
Compléter les programmes ci-dessous demandant un rang et donnant le terme u_n

a) Avec une boucle while

```python
U=3
i=2
n = int(input("n = "))



print(f"le terme de rang {i} vaut {U}")
```

b) Avec une boucle for

```python
U=3
i=2
n = int(input("n = "))



print(f"le terme de rang {n} vaut {U}")
```

Question Bonus :
à votre avis quelle est la meilleure version (que se passe-t-il si on prend un n un peu problématique).

Correction

Exercice 1
Pour les deux suites suivantes dire à partir de quel rang elles sont définies et calculer leurs 3 premiers termes.

1. $u_n = \frac{5}{(n+3)(n-4)}$ Valeur interdite : $n + 3 = 0 \Leftrightarrow n = -3$ et $n - 4 = 0 \Leftrightarrow n = 4$ainsi la suite (u_n) est définie à partir de $n = 5$ et ses premiers termes seront $u_5 = \frac{5}{8\times1}$, $u_6 = \frac{5}{9\times2} = \frac{5}{18}$, $u_7 = \frac{5}{10\times3} = \frac{1}{6}$
2. $v_n = 5 + \sqrt{2n - 10}$ $\quad 2n - 10 \geq 0 \Leftrightarrow 2n > 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{10}{2}$ donc (v_n) est définie à partir de $n = 5$ et ses premiers termes seront $u_5 = 5 + \sqrt{0} = 5$, $u_6 = 5 + \sqrt{12 - 10} = 5 + \sqrt{2}$ et $u_7 = 5 + \sqrt{14 - 10} = 7$

Exercice 2
1. $\begin{cases} u_5 = 2 \\ \mathrm{u_{n+1}} = 2\mathrm{u_n} - \mathrm{n} \end{cases}$ $u_5 = 2$, $u_6 = 2u_5 - 5 = 2 \times 2 - 5 = -1$, $u_7 = 2u_6 - 6 = -8$ et $u_8 = 2u_7 - 7 = 2(-8) - 7 = -23$
2. pour tout entier naturel n par : $w_n = -2n^2 - 3$ donc $w_{n-1} = -2(n-1)^2 - 3 = -2n^2 + 4n - 5$

Exercice 3
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -n^2 + 6n - 9$.
1.a) $u_{n+1} - u_n = (-(n+1)^2 + 6(n+1) - 9) - n^2 + 6n - 9 = -n^2 - 2n - 1 + 6n + 6 - 9 + n^2 - 6n + 9$
$= -2n + 5$. Or 2. $-2n + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -2n \geq -5 \Leftrightarrow n \leq \frac{5}{2}$. Ainsi (u_n) sera croissante avant 2,5 et donc décroissante après, c'est-à-dire à partir de $n = 3$.
b) je reconnais une fonction trinômes $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1 < 0$, $b = 6$ et $c = -9$ donc elle sera croissante jusqu'à $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$ et décroissante après donc (u_n) est décroissante à partir de $n = 3$
3. (v_n) est la suite définie pour tout entier n par $v_n = \frac{1}{2n-3}$.
$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2(n+1)+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)} - \frac{1(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)-(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)}$ comme le numérateur est négative et que le dénominateur est positif on aura : $v_{n+1} - v_n < 0$ et donc la suite est décroissante.
4. (w_n) est la suite définie pour tout entier n par $w_n = -2 \times \frac{5^n}{3^n}$.
$w_{n+1} - w_n = 2 \times \frac{5^{n+1}}{3^{n+1}} - 2 \times \frac{2^n}{3^n} = 2 \times \frac{5^n}{3^n}\frac{5}{3} - 2 \times \frac{5^n}{3^n} = 2 \times \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{5}{3} - 1\right) = 2 \times \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{2}{3}\right) > 0$ donc la suite est croissante.
Comme on a affaire à une suite strictement positive on peut utiliser :
Avec $n \geq 0$ $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2\times\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}}}{2\times\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}}} = \frac{\frac{5^n 5}{3^n 3}}{\frac{5^n}{3^n}} = \frac{5}{3} > 1$ donc la suite est croissante.

Exercice 4
1. Ce programme sert à trouver à partir de quel rang la suite (U_n) dépasse 90.
2. $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = 4 + U_n \end{cases}$
3. D'après le tableau ci-dessous le premier rang qui permettra de dépasser 33 est 9, ainsi à la fin de l'exécution du programme on aura $U = 34$ et $n = 9$

```
U ← -2
n ← 0
Tant que U < 33
    U ← 4 + U
    n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher U et n
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_n	-2	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38

Exercice 5

1)
```python
U=3
i=2
n = int(input("n = "))
while i<n:
    U=3*U-5
    i = i + 1
print(f"le terme de rang {i} vaut {U}")
```

2)
```python
U=3
i=2
n = int(input("n = "))
for i in range(3,n+1):
    U=3*U-5

print(f"le terme de rang {n} vaut {U}")
```

La meilleure version est celle avec while car elle ne nous racontera pas de bétise si on prend n qui vaut 0 ou 1