DM : suites arithmétiques et géométriques 1Spe

Exercice 1

On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4} \end{cases}$.

1. a. Calculer u_1 et u_2, donner les résultats sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

b. On donne $u_{1000} = -\frac{1000}{1003}$, calculer u_{999} sous forme de fraction irréductible (sans utiliser la formule explicite de la dernière question).

2. On définit la suite (v_n) pour tout entier $n > 0$ par : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

a. Calculer v_1 et v_2, donner les résultats sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

b. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle écrive dans la console les n premiers termes de la suite (v_n) de v_1 à v_n.

```
def premiers_v(n):
        u = 0
        v = .....
        for k in range(n):
                u = .....
                v = ......
                ...........
```

c. On obtient la liste suivante pour premiers_v(5) :

1.0   1.33333333   1.66666667   2.0   2.3333333   2.6666666

On rappelle que Python ne donne que des valeurs approchées des nombres réels, par exemple 1.33333333 représente $\frac{4}{3}$ et 1.6666667 représente $\frac{5}{3}$.

- Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (v_n) (arithmétique, géométrique, ni arithmétique ni géométrique) ?
- Démontrer cette conjecture.
- En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n = -\frac{n}{3+n}$.

Exercice 2

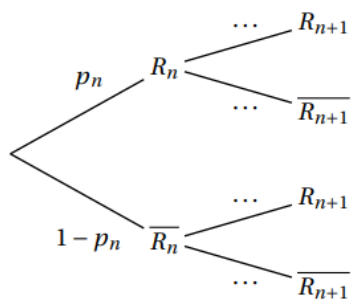
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90% des cas le jour suivant;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70% des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = p_n - 0,75$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0, 6 et de premier terme −0, 15.

b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n : $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

d. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse

Affirmation 1 : Il existe un entier j tel que $p_j > 0,75$.

Affirmation 2 : Il existe un entier i tel que $p_i > 0,75 - 10^{-6}$.

Correction

Exercice 1

On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n+4}. \end{cases}$

1. a. $u_1 = \frac{2u_0-1}{u_0+4} = \frac{-1}{4}$ et $u_2 = \frac{2u_1-1}{u_1+4} = \frac{2\frac{-1}{4}-1}{\frac{-1}{4}+4} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{15}{4}} = -\frac{3}{2} \times \frac{4}{15} = -\frac{2}{5}$.

b. $u_{1000} = \frac{2u_{999}-1}{u_{999}+4} \Leftrightarrow \frac{-1000}{1003} = \frac{2u_{999}-1}{u_{999}+4}$

$\Leftrightarrow -1000(u_{999}+4) = 1003(2u_{999}-1)$

$\Leftrightarrow -1000u_{999} - 4000 = 2006u_{999} - 1003$

$\Leftrightarrow -1000u_{999} - 2006u_{999} = -1003 + 4000$

$\Leftrightarrow -3006u_{999} = 2997 \Leftrightarrow u_{999} = -\frac{2997}{3006} \Leftrightarrow u_{999} = -\frac{999}{1002} \Leftrightarrow u_{999} = -\frac{333}{334}$

Généralisation :

$u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n+4} \Leftrightarrow u_{n+1}(u_n+4) = 2u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1}u_n + u_{n+1}4 = 2u_n - 1$

$\Leftrightarrow u_{n+1}u_n - 2u_n = -1 - u_{n+1}4 \Leftrightarrow u_n(u_{n+1}-2) = -1 - u_{n+1}4$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1-u_{n+1}4}{u_{n+1}-2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1+4u_{n+1}}{2-u_{n+1}}$

2. a. $v_1 = \frac{1}{u_1+1} = \frac{1}{-\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ et $v_2 = \frac{1}{u_2+1} = \frac{1}{-\frac{2}{5}+1} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$,.

b.

```
def premiers_v(n):
        u = 0
        v = 1
        for k in range(n):
                u = (2*u-1)/(u+4)
                v = 1/(u+1)
                print(v)
```

c. (v_n) semble être arithmétique de raison 1/3 et de premier terme $v_0 = 1$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n+4}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+4}{2u_n-1+u_n+4} - \frac{1}{u_n+1}$

$= \frac{u_n+4}{3u_n+3} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+4}{3(u_n+1)} - \frac{3}{3(u_n+1)} = \frac{u_n+1}{3(u_n+1)} = \frac{1}{3}$ ainsi (v_n) est bien arithmétique de raison 1/3 et donc $v_n = 1 + \frac{1}{3}n$

Soit n un entier alors : $v_n = \frac{1}{u_n+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{u_n+1}$

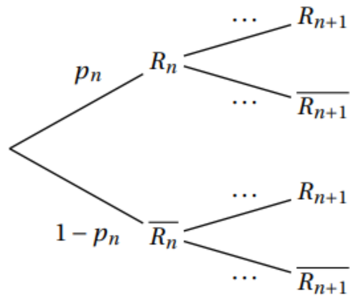
$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{3}n\right)(u_n+1) = 1 \Leftrightarrow u_n + 1 + \frac{1}{3}nu_n + \frac{1}{3}n = 1$

$\Leftrightarrow u_n + 1 + \frac{1}{3}nu_n + \frac{1}{3}n = 1$

$\Leftrightarrow u_n\left(1+\frac{1}{3}n\right) = 1 - 1 - \frac{1}{3}n \Leftrightarrow u_n = \frac{-\frac{1}{3}n}{1+\frac{1}{3}n} \Leftrightarrow u_n = \frac{-n}{3+n}$

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



De haut en bas les coefficients sont :

0,9 0,1 0,3 0,7

2. par formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(R_{n+1})$

$= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$

$= p_n 0{,}9 + (1-p_n)0{,}3 = 0{,}9p_n - 0{,}3p_n + 0{,}3 = 0{,}6p_n + 0{,}3$.

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n = p_n - 0,75$.

a.$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = 0{,}6p_n + 0{,}3 - 0,75 = 0{,}6p_n - 0{,}45$

or $u_n = p_n - 0,75$ donc $p_n = u_n + 0,75$ donc $u_{n+1} = 0{,}6(u_n + 0,75) - 0{,}45$

ainsi $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}45 - 0{,}45 = 0{,}6u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_0 = p_0 - 0{,}75 = 0{,}6 - 0{,}75 = -0{,}15$

ainsi pour tout entier n on aura : $u_n = -0{,}15 \times 0{,}6^n$.

b. Soit n un entier naturel, alors : $u_n = p_n - 0,75$

$\Leftrightarrow -0{,}15 \times 0{,}6^n = p_n - 0{,}75 \Leftrightarrow 0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^n = p_n$.

c. 0,6 étant dans $]-1;1[$, on aura $0{,}6^n$ qui convergera vers 0.

Et donc $0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^n$ convergera vers 0,75.

d. On sait que $p_n = 0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^n$

donc pour tout entier naturel n, $p_n < 0{,}75$ donc l'affirmation 1 est fausse

comme (p_n) converge vers 0,75 , les termes de la suite seront aussi près de 0,75 que l'on veut si on prend un rang assez grand. L'affirmation 2 propose un écart négatif de 10^{-6}. Le signe est bon car $p_n < 0{,}75$ quelque soit le rang. Donc c'est tout à fait possible, avec la calculatrice ou python on peut trouver un tel rang : 24