Devoir Maison : Suites Numériques et Modélisation

Exercice 1 : Étude d'une suite arithmético-géométrique et limites

Objectif : Utiliser une suite géométrique auxiliaire pour exprimer une suite complexe et étudier son comportement asymptotique.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 8$$

1. **Étude des variations :** a. Démontrer par récurrence (ou par étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ en admettant la monotonie) que pour tout n, $u_n < 20$. b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. **Suite auxiliaire :** On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 20$. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. b. Exprimer v_n en fonction de n. c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 20 - 10 \times 0,6^n$.
3. **Limite et application :** Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2 : Transformation vers une suite arithmétique

Objectif : Manipuler une suite définie par un quotient pour se ramener à une suite arithmétique.

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n}$$

1. On définit la suite (b_n) par $b_n = \frac{1}{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. a. Démontrer que la suite (b_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$. b. Exprimer b_n en fonction de n.
2. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?
4. **Programmation Python :** On souhaite déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,001$. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie cette valeur :

```
def seuil():
    a = 0.5
    n = 0
    while ......... :
        a = .........
        n = .........
    return n
```

Exercice 3 : Suites et Probabilités

Objectif : Modéliser l'évolution d'un système aléatoire à l'aide de suites.

Un joueur de tennis s'exerce au service.

- S'il réussit son premier service, il réussit le suivant avec une probabilité de $0,8$.
- S'il manque son premier service, il réussit le suivant avec une probabilité de $0,7$.

On note R_n l'événement "le joueur réussit son n-ième service" et $p_n = P(R_n)$. On commence à $n = 1$ et on suppose que $p_1 = 0,7$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré reliant l'étape n à l'étape $n + 1$.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,1p_n + 0,7$$

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = p_n - \frac{7}{9}$. a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique. b. Exprimer w_n puis p_n en fonction de n.
4. Vers quelle valeur la probabilité de réussir son service se stabilise-t-elle sur le long terme ?

Exercice 4 : Un problème d'optimisation (Bonus / Expert)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_n = n^2 - 10n + 25$
- $v_n = 2^n$

1. Étudier les variations de la suite (u_n) pour $n \in \mathbb{N}$. Admet-elle un minimum ?
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel rang n_0 on a $v_n > u_n$.