

Contrôle : suites géométriques et arithmétiques

Exercice 1

Soit trois suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{3n-3}}{3^{n+2}}$
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3n^2+4n-15}{n+3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{2}{n} + 5n - 7$

- 1) Dire des suites suivantes si elles sont arithmétiques ou géométriques, et dans ce cas donner premier élément et raison.

Astuce : $3n^2 + 4n - 15$ peut être factorisé avec les formules du premier chapitre

- 2) Donner les variations de (u_n) puis conjecturer la limite de cette suite

Exercice 2

Soit u_n arithmétique définie pour tout entier n plus grand que 4 et qui vérifie $u_7 = 27, u_{11} = 7$

- a. Déterminer une expression par récurrence de (u_n)
- b. Donner les variations de la suite. Conjecturez la limite.

Exercice 3

Soit (u_n) et (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -70 + 2n$ et $\begin{cases} v_2 = 125 \\ v_{n+1} = 1,2v_n \end{cases}$

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=30}^{n=40} u_n \qquad \sum_{i=2}^{i=30} v_i$$

Exercice 4 : Étude du remboursement d'un emprunt immobilier

Contexte : M. et Mme Baroudi achètent une maison d'une valeur de 200 000 €. Pour cela, ils souscrivent un prêt immobilier au taux mensuel de 0,5 % (ce qui correspond à un taux nominal annuel de 6 % par an). Ils s'engagent à rembourser chaque mois une mensualité fixe de 1500 €.

On note u_n le capital restant dû (la somme qu'ils doivent encore à la banque) après le paiement de la n -ième mensualité. On a donc $u_0 = 200\,000$.

Partie 1 : Modélisation par une suite

- 1) Justifier que pour tout entier naturel n , on a la relation :

$$u_{n+1} = 1,005u_n - 1500.$$

- 2) Bonus : De quel type de suite s'agit-il ?

Partie 2 : Expression de u_n en fonction de n .

On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 300\,000.$$

- 1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,005$. Préciser son premier terme v_0 (arrondi à l'unité).
- 2) Exprimer v_n en fonction de n .
- 3) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 300\,000 - 100\,000 \times 1,005^n$.

Partie 3 : Limites du modèle

À l'aide de la calculatrice, calculer la valeur de u_{300} (ce qui correspondrait à un remboursement sur 25 ans).

- 1) Que remarque-t-on ? Pourquoi peut-on dire que le résultat est aberrant ?
- 2) Expliquer pourquoi le modèle mathématique (la suite u_n) ne correspond plus à la réalité financière passé un certain rang.

Partie 4 : Détermination de la fin du prêt

On souhaite savoir exactement après combien de mois la maison sera totalement payée.

- 1) Compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche le nombre de mois nécessaires pour rembourser le prêt.

```
def duree_remboursement():
    u = 200000
    n = 0
    while ..... :           # Condition pour continuer à rembourser
        u = .....           # Calcul du nouveau capital restant dû
        n = .....           # Incrémentation du mois
    return n

print("Le prêt sera remboursé après", duree_remboursement(), "mois.")
```

- 2) En utilisant votre calculatrice, donner la valeur de n renvoyée par ce programme. Convertir ce résultat en années et mois.
- 3) Bonus : que pense tu de ce taux annuel nominal ? Est-ce que ça colle à la réalité ?

Correction

Exercice 1

Dire des suites suivantes si elles sont arithmétiques ou géométriques, et dans ce cas donner premier élément et raison.

$$\text{Soit un entier } n, u_n = \frac{2^{3n-3}}{3^{n+2}} = \frac{2^{3n}}{3^n} \times \frac{2^{-3}}{3^{+2}} = \frac{(2^3)^n}{3^n} \times \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} = \left(\frac{8}{3}\right)^n \times \frac{1}{72}$$

(u_n) est donc géométrique de raison $\frac{8}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{72}$

Comme elle est géométrique de premier terme positif et de raison plus grande que 1 la suite est croissante et elle semble tendre vers $+\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3n^2 + 4n - 15}{n+3}$$

$$v_0 = -5 \quad v_1 = -\frac{8}{4} = -2 \quad v_2 = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{et } v_3 = \frac{24}{6} = 4$$

On a l'impression que la suite est arithmétique de premier terme $v_0 = -5$ et de raison 3 mais l'expression ne ressemble pas trop à $v_n = -5 + 3n$

On pourrait faire $v_{n+1} - v_n$ ça serait un peu long

Alors revenons à la première idée prouvons que $v_n = -5 + 3n$

$$-5 + 3n = \frac{-5+3n}{1} = \frac{(-5+3n)(n+3)}{1(n+3)} = \frac{-5n-15n+3n^2+9n}{n+3} = \frac{3n^2+4n-15}{n+3} = v_n \text{ CQFD}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{2}{n} + 5n - 7$$

$$w_1 = 2 + 5 - 7 = 0 \quad w_2 = 1 + 10 - 7 = 4 \quad w_3 = \frac{2}{3} + 15 - 7 = \frac{26}{3}$$

On augmente de 4 entre les deux premiers termes mais pas entre les suivants donc la suite n'est pas arithmétique.

Il n'existe pas de réel permettant de passer de 0 à 4 avec une multiplication donc la suite ne peut être géométrique.

Exercice 2

Soit u_n arithmétique définie pour tout entier n plus grand que 4 et qui vérifie

$$u_7 = 27, u_{11} = 7$$

- Déterminer une expression par récurrence de (u_n)
- Donner les variations de la suite. Conjecturez la limite.

Soit u_n arithmétique définie pour tout entier non nul n vérifiant $u_7 = 27, u_{11} = 7$

- $u_{11} = u_7 + r(11 - 7) \Leftrightarrow 7 = 27 + 4r \Leftrightarrow -20 = 4r \Leftrightarrow r = -5$

$$\begin{cases} u_5 = u_7 - (7 - 5)(-5) = 27 + 10 = 37 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$$
- Donner les variations de la suite.

La raison de cette suite arithmétique étant strictement négative (u_n) est strictement décroissante et semble diverger vers $-\infty$.

Exercice 3

Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -70 + 2n$ elle est arithmétique donc :

$$\sum_{n=30}^{n=40} u_n = \frac{(\text{premier } t + \text{dernier } t)(\text{nombre de } t)}{2} = \frac{(u_{40} + u_{30})(40 - 30 + 1)}{2} = \frac{(-10 + 10)11}{2} = 0$$

Avec (v_n) telle que $\begin{cases} v_2 = 125 \\ v_{n+1} = 1,2v_n \end{cases}$, elle est géométrique donc :

$$\sum_{i=p}^{i=n} v_i = (\text{premier } t) \frac{1 - q^{nb \text{ de } t}}{1 - q} = v_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = 125 \frac{1 - 1,2^{29}}{1 - 1,2} = -625(1 - 1,2^{29})$$

Version j'ai oublié la formule mais je sais comment ça fonctionne

$S = \sum_{i=2}^{i=30} v_i = v_2 + v_3 + v_4 + \dots + v_{30}$ donc $qS = v_3 + v_4 + \dots + v_{31}$ et donc

$$S - qS = v_2 - v_{31} \Leftrightarrow S(1 - q) = v_2 - v_2 q^{29} \Leftrightarrow S = \frac{v_2(1 - q^{29})}{1 - q} \Leftrightarrow S = 125 \frac{1 - 1,2^{29}}{1 - 1,2} \text{ etc}$$

Partie 1

- Chaque mois, le capital restant dû u_n augmente de 0,5 % à cause des intérêts (on multiplie par 1,005) et diminue de la mensualité de 1500 €. On a donc bien $u_{n+1} = 1,005u_n - 1500$.
- C'est une suite **arithmético-géométrique**.

Partie 2

- Démonstration de la suite géométrique :**

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 300\,000 = 1,005u_n - 1500 - 300\,000 = 1,005u_n - 301\,500$$

$$q v_n = 1,005(u_n - 300\,000) = 1,005u_n - 301\,500 = v_{n+1}$$

Donc (v_n) est bien géométrique de raison $q = 1,005$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 300\,000 = -100\,000$

- et donc pour tout entier n on aura $v_n = -100\,000 \times 1,005^n$
- Comme $v_n = u_n - 300\,000$ on aura :
 $u_n = v_n + 300\,000 = 300\,000 - 100\,000 \times 1,005^n$

Partie 3

- $u_{300} = 300\,000 - 100\,000 \times 1,005^{300} \approx -146\,497\text{€}$.
- Le résultat est négatif, ce qui signifierait que la banque doit environ 146 497€ aux Baroudi ! C'est aberrant.
- Limites du modèle :** La suite un modélise le retrait automatique de 1500 € chaque mois. Or, dans la réalité, le contrat de prêt s'arrête dès que $u_n \leq 0$. La suite ne tient pas compte de l'arrêt du contrat : elle continue de soustraire des mensualités et de calculer des intérêts sur un solde négatif.

Partie 4

- Programme Python :**

- while u > 0 :
- u = 1.005 * u - 1500
- n = n + 1

- À la calculatrice (Table ou boucle), on cherche le premier n pour lequel $u_n \leq 0$. On trouve $n = 221 = 18 \times 12 + 5$ autrement dit 18 ans et 5 mois. Le prêt sera remboursé en un peu moins de **19 ans**.

Contrôle : suites géométriques et arithmétiques

Sujet Yanis

Exercice 1

Soit trois suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{n-3}}{3^{2n+2}}$
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3n^2+4n-15}{n+3}$ $\forall n \geq 2, w_n = \frac{2}{n-1} + 5n - 7$

- 1) Dire des suites suivantes si elles sont arithmétiques ou géométriques, et dans ce cas donner premier élément et raison.

Astuce : $3n^2 + 4n - 15$ peut être factorisé avec les formules du premier chapitre

- 2) Donner les variations de (u_n) puis conjecturer la limite de cette suite

Exercice 2

Soit u_n arithmétique définie pour tout entier n plus grand que 4 et qui vérifie $u_{10} = 27, u_{16} = 45$

- a. Déterminer une expression par récurrence de (u_n)
- b. Donner les variations de la suite. Conjecturez la limite.

Exercice 3

Soit (u_n) et (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -70 + 3n$ et $\begin{cases} v_2 = 100 \\ v_{n+1} = 1,02v_n \end{cases}$

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=30}^{n=40} u_n$$

$$\sum_{i=5}^{i=30} v_i$$

Exercice 4 : Étude du remboursement d'un emprunt immobilier

Contexte : M. et Mme Baroudi achètent une maison d'une valeur de 200 000 €. Pour cela, ils souscrivent un prêt immobilier au taux mensuel de 0,5 % (ce qui correspond à un taux nominal annuel de 6 % par an). Ils s'engagent à rembourser chaque mois une mensualité fixe de 1500 €.

On note u_n le capital restant dû (la somme qu'ils doivent encore à la banque) après le paiement de la n -ième mensualité. On a donc $u_0 = 200\,000$.

Partie 1 : Modélisation par une suite

- 1) Justifier que pour tout entier naturel n , on a la relation :

$$u_{n+1} = 1,005u_n - 1500.$$

- 2) Bonus : De quel type de suite s'agit-il ?

Partie 2 : Expression de u_n en fonction de n .

On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 300\,000.$$

- 1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,005$. Préciser son premier terme v_0 (arrondi à l'unité).
- 2) Exprimer v_n en fonction de n .
- 3) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 300\,000 - 100\,000 \times 1,005^n.$$

Partie 3 : Limites du modèle

À l'aide de la calculatrice, calculer la valeur de u_{300} (ce qui correspondrait à un remboursement sur 25 ans).

- 1) Que remarque-t-on ? Pourquoi peut-on dire que le résultat est aberrant ?
- 2) Expliquer pourquoi le modèle mathématique (la suite u_n) ne correspond plus à la réalité financière passé un certain rang.

Partie 4 : Détermination de la fin du prêt

On souhaite savoir exactement après combien de mois la maison sera totalement payée.

- 1) Compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche le nombre de mois nécessaires pour rembourser le prêt.

```
def duree_remboursement():
```

```
    u = 200000
```

```
    n = 0
```

```
    while ..... : # Condition pour continuer à rembourser
```

```
        u = ..... # Calcul du nouveau capital restant dû
```

```
        n = ..... # Incrémentation du mois
```

```
    return n
```

```
print("Le prêt sera remboursé après", duree_remboursement(), "mois.")
```

- 2) En utilisant votre calculatrice, donner la valeur de n renvoyée par ce programme. Convertir ce résultat en années et mois.
- 3) Bonus : que pense tu de ce taux annuel nominal ? Est-ce que ça colle à la réalité ?