Entrainement : suites géométriques et arithmétiques

Exercice 1
Dire des suites suivantes si elles sont arithmétiques ou géométriques, et dans ce cas donner premier élément et raison.
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5^{n-3}}{3^{2n+4}}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 3n^2 + 5n - 7$
$\forall n \geq 3, w_n = (6n-5)^2 - 9(4n^2 + 7n + 1)$

Exercice 2
1) Soit u_n arithmétique définie pour tout entier non nul n vérifiant $u_5 = 27$, $u_9 = 7$
   a. Déterminer une expression par récurrence de (u_n)
   b. Donner les variations de la suite. Conjecturez la limite.
2) Soit v_n géométrique définie pour tout entier n vérifiant $v_{10} = 20$ et $v_{13} = \frac{5}{2}$.
   a. Déterminer une expression en fonction de n de (v_n)
   b. Donner les variations de la suite. Conjecturez la limite.

Exercice 3
Soit (u_n) et (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 - 3n$ et $\begin{cases} v_2 = 150 \\ v_{n+1} = \frac{90}{100} v_n \end{cases}$
Calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{n=5}^{n=25} u_n \qquad \sum_{i=2}^{i=30} v_i$$

Exercice 4 : Comparaison de deux évolutions de carrière
Contexte : Une entreprise propose deux options de rémunération pour un poste de cadre commercial. On souhaite comparer ces deux options sur le long terme. On note n le nombre de mois écoulés depuis la prise de poste. Le mois de l'embauche correspond à n=0.
Option A : Le salaire initial est de 2200 €. Chaque mois, le salaire augmente de 40€. On note u_n le salaire mensuel au mois n.
Option B : Le salaire initial est de 1900 €. Chaque mois, le salaire augmente de 2,5%. On note (v_n) le salaire mensuel au mois n.

Partie 1 : Étude de l'Option A
1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier en précisant son premier terme u_0 et sa raison r.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer le salaire mensuel proposé par l'Option A au bout de 2 ans (soit pour $n = 23$).

Partie 2 : Étude de l'Option B
1. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q=1,025. Préciser son premier terme v_0.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Calculer le salaire mensuel proposé par l'Option B au bout de 2 ans. *Arrondir au centime d'euro.*

Partie 3 : Seuil de rentabilité et Algorithmique
On remarque qu'au début, le salaire de l'Option B est inférieur à celui de l'Option A. On souhaite déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel de l'Option B dépasse celui de l'Option A.
1. On considère le programme Python ci-dessous. Compléter les zones en pointillés pour qu'il réponde à la problématique.

```
def trouver_seuil():
   u = 2200
   v = 1900
   n = 0
   while .................: # Tant que le salaire B est inférieur au salaire A
      u = ................. # Nouvelle valeur de u
      v = ................. # Nouvelle valeur de v
      n = ................. # Passage au mois suivant
   return n

print("Le salaire B dépasse le salaire A au bout de", trouver_seuil(), "mois.")
```

2. À l'aide de votre calculatrice (menu Suite ou Table), déterminer la valeur de n renvoyée par ce programme.

Exercice 5
Des fonctions dérivées avec les formules vues lundi 26 janvier.

Correction

Exercice 1

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{5^{n-3}}{3^{2n+4}}=\frac{5^n5^{-3}}{3^{2n}3^4}=\frac{5^n}{(3^2)^n}\times\frac{5^{-3}}{3^4}=\left(\frac{5}{9}\right)^n\times\frac{1}{3^45^3}$

(u_n) est donc géométrique de raison $\frac{5}{9}$ et de premier terme $\frac{1}{3^45^3}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n=3n^2+5n-7$

$v_1=1$ $v_2=15$ $v_3=35$

Ainsi $v_3-v_2=20$, $v_2-v_1=24$, $\frac{v_3}{v_2}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$ et $\frac{v_2}{v_1}=25$

donc $v_3-v_2\neq v_2-v_1$ donc (v_n) n'est pas arithmétique

et aussi $\frac{v_3}{v_2}\neq\frac{v_2}{v_1}$ donc (v_n) n'est pas géométrique

$\forall n\geq 3, w_n=(6n-5)^2-9(4n^2+7n+1)$

$=36n^2-60n+25-36n^2-63n-9=16-123n$

(w_n) serait donc arithmétique de raison -123 et de premier terme $w_0=16$ sauf que la suite est définie à partir du rang 3 donc son premier terme est en fait $w_3=16-123\times 3=16-369=-353$

Exercice 2

1) Soit u_n arithmétique définie pour tout entier non nul n vérifiant $u_5=27, u_9=7$
   a. $u_9=u_5+r(9-5)\Leftrightarrow 7=27+4r\Leftrightarrow -20=4r\Leftrightarrow r=-5$
   $\begin{cases}u_1=u_5-(5-1)r=47\\ u_{n+1}=u_n-5\end{cases}$
   b. Donner les variations de la suite.
   La raison étant strictement négative (u_n) est strictement décroissante et semble diverger vers $-\infty$.
2) Soit v_n géométrique définie pour tout entier n vérifiant $v_{10}=20$ et $v_{13}=\frac{5}{2}$.
   a. $v_{13}=v_{10}q^3\Leftrightarrow\frac{5}{2}=20q^3\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3=q^3\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$
   $v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{v_{10}}{q^{10}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{20}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}\left(\frac{1}{2}\right)^n=20480\left(\frac{1}{2}\right)^n$
   b. Donner les variations de la suite.
   $0<q<1$ et $v_0=20480>0$ donc la suite est décroissante et converge vers 0

Exercice 3

Soit (u_n) et (v_n) vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=7-3n$ et $\begin{cases}v_2=150\\ v_{n+1}=\frac{90}{100}v_n\end{cases}$

Calculer les sommes suivantes :

$\sum_{n=5}^{n=25}u_n=\frac{(u_{25}+u_5)(25-5+1)}{2}=\frac{(7-3\times25+(7-3\times5))21}{2}=\frac{-76\times21}{2}=-798$

Somme de termes d'une suite géométriques $=$ *premier terme* $\times\frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$

$\sum_{i=2}^{i=30}v_i=v_2\frac{1-q^{29}}{1-q}=150\frac{1-0{,}9^{29}}{0{,}1}=1500(1-0{,}9^{29})$

Exercice 4

Partie 1 : Étude de l'Option A (Suite Arithmétique)

1. Nature de la suite : Chaque mois, on ajoute une somme fixe de 40 €. Passer d'un terme au suivant par l'addition d'une constante est la définition d'une **suite arithmétique**.

- **Premier terme :** $u_0=2200$
- **Raison :** r=40

2. Expression de u_n en fonction de n : D'après le cours, pour une suite arithmétique : $u_n=u_0+n\times r$. On a donc : $\boldsymbol{u_n=2200+40n}$.

3. Salaire au bout de 2 ans : Il y a 24 mois dans 2 ans. Puisque l'on commence à $n=0$ (mois 1), le 24ème mois correspond à $\boldsymbol{n=23}$.

$u_{23}=2200+40\times23=2200+920=3120$ **€**.

Partie 2 : Étude de l'Option B (Suite Géométrique)

1. Justification de la suite : Augmenter une valeur de 2,5 % revient à la multiplier par son coefficient multiplicateur $C_m=1+\frac{2{,}5}{100}=1{,}025$. Comme on multiplie par une constante pour passer d'un mois à l'autre, (v_n) est une **suite géométrique**.

- **Premier terme :** $v_0=1900$
- **Raison :** $q=1{,}025$

2. Expression de v_n en fonction de n : D'après le cours, pour une suite géométrique : $v_n=v_0\times q^n$. On a donc : $\boldsymbol{v_n=1900\times1{,}025^n}$.

3. Salaire au bout de 2 ans $(\boldsymbol{n=23})$: $v_{23}=1900\times1{,}025^{23}$ À la calculatrice : $v_{23}\approx3353{,}44$ **€**.

Note : On remarque qu'à 2 ans, l'Option B est déjà plus avantageuse que l'Option A, malgré un départ plus bas !

Partie 3 : Algorithmique et Seuil

1. Programme Python complété :

L'idée ici est d'utiliser une boucle while (Tant que). On veut que la boucle s'arrête dès que v devient plus grand que u. On continue donc **tant que** v<u.

```
def trouver_seuil():
  u = 2200
  v = 1900
  n = 0
  while v < u : # Tant que le salaire B est inférieur au salaire A
    u = u + 40        # On ajoute 40 (arithmétique)
    v = v * 1.025     # On multiplie par 1.025 (géométrique)
    n = n + 1         # On compte un mois de plus
```

```
    return n
```

2. Détermination du rang n : En utilisant le menu **Table** de la calculatrice, on cherche le premier n tel que $v_n > u_n$:

n	un (A)	vn (B)	Observation
15	2800	≈2751	A>B
16	2840	≈2820	A>B
17	**2880**	**≈2891**	**B>A !**

Le programme renverra donc **n=17**. Cela signifie qu'au **18ème mois** $(n = 17)$, le salaire de l'Option B dépasse celui de l'Option A.

Le petit conseil :

- **Attention au rang :** Si l'énoncé dit "au bout de 2 ans", vérifiez bien si vous commencez à n=0 ou n=1. Ici, pour n=0 (1er mois), le bout de 2 ans est bien n=23.
- **Rédaction Python :** En Python, l'incrémentation n = n + 1 est indispensable, sinon votre boucle tourne à l'infini et le programme plante !