Correction exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies et calculer les 3 premiers termes de ces suites.

a) $u_n = -n^2 + n + 1$ b) $v_n = \frac{1}{n-3}$ c) $w_n = \sqrt{n^2 - 4}$

a) (u_n) est définie à partir du rang 0. Les trois premiers termes sont $u_0 = -0^2 + 0 + 1 = 1$, $u_1 = -1^2 + 1 + 1 = 1$ et $u_2 = -2^2 + 2 + 1 = -1$.

b) (v_n) est définie pour tout entier *n* tel que *n* − 3 6= 0 i.e. *n* 6= 3. Puisque l'énoncé demande un rang à partir duquel (v_n) est définie, on peut dire que (v_n) est définie à partir du rang 4.

Dans ce cas, les trois premiers termes sont $v_4 = \frac{1}{4-3} = 1$, $v_5 = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}$ et $v_6 = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3}$.

c) (w_n) est définie pour tout entier *n* tel que $n^2 - 4 > 0$ i.e. $n > 2$. Les trois premiers termes sont $w_2 = \sqrt{2^2 - 4} = 0$, $w_3 = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5}$ et $w_4 = \sqrt{4^2 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1}, u_{n+1}, $u_n - 1$ et u_{n-1} en fonction de n.

Exercice 2.

1. Les trois premiers termes de (*un*) sont $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0$, $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

2. On a :

$u_n + 1 = \frac{n}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \frac{n+n+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

$un + 1 = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$u_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{n-(n+1)}{n+1} = \frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$

$u_{n-1} = \frac{n-1}{(n-1)+1} = \frac{n-1}{n-1+1} = \frac{n-1}{n}$

Méthode 1 : Calculer des termes d'une suite définies en fonction de n

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) $u_n = 2n$ b) $v_n = 3n^2 - 1$

Correction

a) On considère : $u_n = 2n$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$u_0 = 2 \times 0 = 0$ ← On remplace n par 0

$u_1 = 2 \times 1 = 2$ ← On remplace n par 1

$u_2 = 2 \times 2 = 4$

$u_3 = 2 \times 3 = 6$

b) On considère : $v_n = 3n^2 - 1$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$

$v_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$

$v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$

$v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$

Exercice 3. Déterminer les trois premiers termes de chacune des suites.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 3$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+2}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{n}{n+1}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 1 - \frac{1}{n+3}$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{2^n}{5^n}$.

6. $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \frac{2^n}{7^{n+1}}$.

1. $u_0 = 0^2 + 3 = 3$ $\quad u_1 = 1^2 + 3 = 4$ $\quad u_2 = 2^2 + 3$

2. $v_0 = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$. $\quad v_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ $\quad v_2 = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

3. $w_0 = \frac{0}{0+1} = 0$. $\quad w_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\quad w_2 = \frac{2}{2+1}$

4. $t_0 = 1 - \frac{1}{0+3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. $\quad t_1 = 1 - \frac{1}{1+3} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. $\quad t_2 = 1 - \frac{1}{2+3} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

5. $s_0 = \frac{2^0}{5^0} = \frac{1}{1} = 1$. $\quad s_1 = \frac{2^1}{5^1} = \frac{2}{5}$ $\quad s_2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

6. $z_0 = \frac{2^0}{7^{0+1}} = \frac{1}{7}$ $\quad z_1 = \frac{2^1}{7^{1+1}} = \frac{2}{49}$ $\quad z_2 = \frac{2^2}{7^{2+1}} = \frac{4}{343}$

Méthode 2 : Calculer des termes d'une suite définie par récurrence (1)

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

b) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 4v_n - 6 \end{cases}$

Correction

a) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n, on a $u_{n+1} = 3u_n$.
Par cette suite, chaque terme est le triple de son précédent.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 5$
$u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$ ← On remplace u_0 par sa valeur.
$u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45$
$u_3 = 3 \times u_2 = 3 \times 45 = 135$

2) La suite (v_n) est définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier n, on a $v_{n+1} = 4v_n - 6$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3$
$v_1 = 4 \times v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$
$v_2 = 4 \times v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$
$v_3 = 4 \times v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66$

Correction

Dans cet exercice, le premier terme est w_1.
La suite (w_n) est définie par $w_1 = 5$ et pour tout entier n, on a $w_{n+1} = w_n + n$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$w_2 = w_{1+1} = w_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ ← n est égal à 1
$w_3 = w_{2+1} = w_2 + 2 = 2 + 2 = 4$ ← n est égal à 2
$w_4 = w_{3+1} = w_3 + 3 = 4 + 3 = 7$ ← n est égal à 3

Méthode 3 : Calculer des termes d'une suite définie par récurrence (2)

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + n \end{cases}$.

Calculer les quatre premiers termes de la suite.

Exercice 4. Calculer les 3 premiers termes de chacune des trois suites (u_n)

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} v_5 = 1 \\ \text{pour tout } n \geq 5, v_{n+1} = v_n - n \end{cases}$

c) $\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \geq 1, w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n+1} \end{cases}$

a) $u_0 = 1, u_1 = u_0^2 + u_0 = 1 + 1 = 2, u^2 = u_1^2 + u_1 = 2^2 + 2 = 6.$
b) $v_5 = 1, v_6 = v_{5+1} = v_5 - 5 = 1 - 5 = -4, v_7 = v_{6+1} = v_6 - 6 = -10.$
c) $w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{w_1}{w_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $w_3 = \frac{w_2}{w_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 5n$.
1. Calculer les 3 premiers termes de (u_n).
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

1. Les trois premiers termes de (u_n) sont $u_0 = 1, u_1 = u_{0+1} = u_0^2 - 5 \times 0 = 1^2 - 0 = 1$ et $u_2 = u_{1+1} = u_1^2 - 5 \times 1 = 1^2 - 5 = -4$.
2. Par définition, $u_{n+2} = u_{(n+1)+1} = u_{n+1}^2 - 5(n+1)$. Or, $u_{n+1} = u_n^2 - 5n$
donc $u_{n+2} = (u_n - 5n)^2 - 5(n+1) = u_n^2 - 2 \times u_n \times 5n + (5n)^2 - 5n - 5$
$= u_n^2 - 10nu_n + 25n^2 - 5n - 5.$

Méthode 4 : Calculer un terme à l'aide d'un algorithme

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$
Écrire un programme **Python** permettant de calculer les termes de la suite (u_n).
Afficher le terme u_{13}.
Correction

```
def suite(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=4*u-6
    return(u)
```

```
>>> suite(13)
67108866
```

Exercice 6.
1) A l'aide de votre calculatrice donner le 10ème terme des trois suites de l'exercice 4
2) A l'aide de votre calculatrice donner le 8ème terme de la suite définie à l'exercice 5

```
def suite_u(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u*u+u
    return u

def suite_v(n):
    v=1
    for i in range(6,n+1):
        v=v-(i-1)
    return v

def suite_w(n):
    w=1/2
    for i in range(2,n+1):
        w=w/(w+1)
    return w
```

1)
```
def suite_u(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u*u+u
    return u

def suite_v(n):
    v=1
    for i in range(6,n+1):
        v=v-(i-1)
    return v

def suite_w(n):
    w=1/2
    for i in range(2,n+1):
        w=w/(w+1)
    return w
```

```
>>> suite_u(10)
2739245030860303142341023429167468628119436436758091462794736794160869202622699363433211840
4582438634929548737283992369758487974306317730580753883429460344956410077034761330476016739
3945464982838554150021392080 6
>>> suite_v(10)
-34
>>> suite_w(10)
0.09090909090909093
```

2)

```
def suite_u(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u*u-5*(i-1)
    return u
```

```
def suite_u(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u*u-5*(i-1)
    return u
```

```
>>> suite_u(8)
986306097679798911841
```

4) <u>Représentation graphique d'une suite</u>

<u>Méthode 5 :</u> Représenter graphiquement une suite

Pour tout entier n, on donne : $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$.

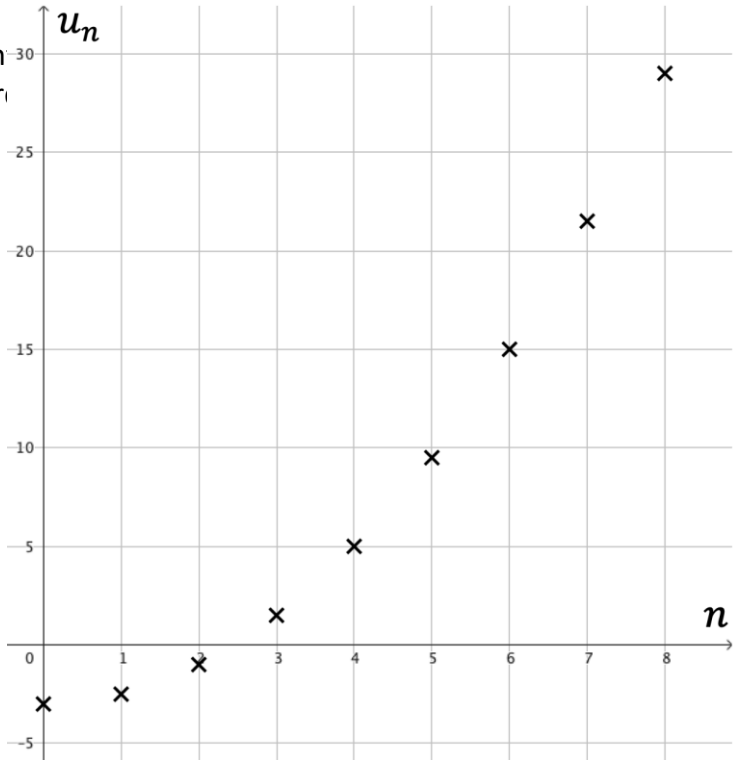
Représenter dans un repère les premiers termes de la suite (u_n).

Correction

On construit un tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29

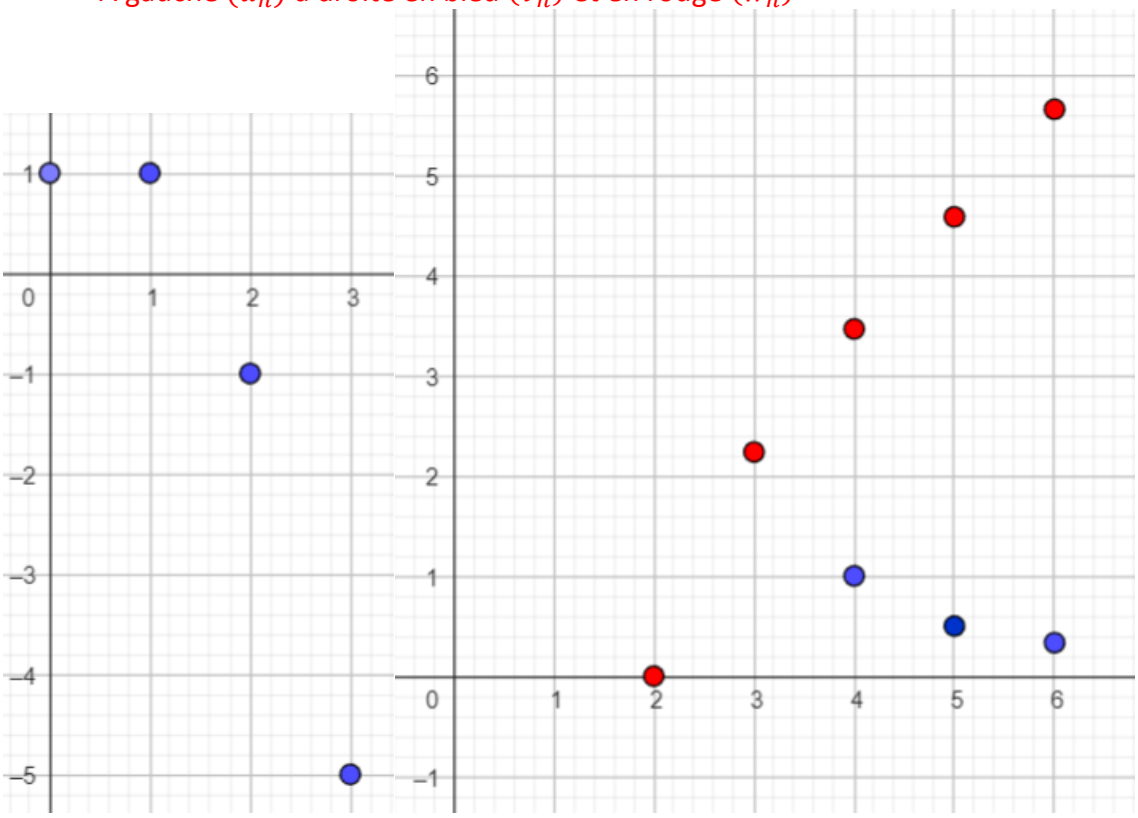
Dans un repère du plan, on représen
(u_n) par un nuage de points de coor
$(n\,;\,u_n)$.



Exercice 7.

1) Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n) de l'exercice 1.

2) Sur le même repère représenter graphiquement les premiers termes (jusqu'au rang 6) des deux suites restantes de l'exercice 1.
A gauche (u_n) à droite en bleu (v_n) et en rouge (w_n)



Méthode 6 : Étudier le sens de variation d'une suite

a) Pour tout entier n, on donne : $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang à déterminer.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on donne : $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

Correction

a) - On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4$$
$$= 2n - 3$$

On calcule $u_{n+1} - u_n$:
Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$,
la suite est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$,
la suite est décroissante.

- On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour $n \geq 1{,}5$.
Soit $n \geq 2$, car n est entier.

- On a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$, pour $n \geq 2$.
On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

b) On commence par calculer le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

Or $0 \leq n \leq n+2$, donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et donc $v_{n+1} < v_n$ (car $v_n > 0$).
On en déduit que (v_n) est décroissante.

Exercice 8.

Etudier les variations des suites de l'exercice 3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 3$.
   Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3 - (n^2+3) = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$
   or pour tout entier naturel n on a : $2n + 1 > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+2}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)+2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(n+3)}{(n+2)(n+3)}$
   $= \frac{(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{n+2-n-3}{(n+3)(n+2)} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)}$ or $\forall n \in \mathbb{N}, n+3 > 0$ et $n+2 > 0$ donc
   $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{(n+3)(n+2)} < 0$ et donc (v_n) est décroissante.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{n}{n+1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$
   $= \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}$
   $= \frac{1}{(n+2)(n+1)}$ or $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc
   $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ et donc (w_n) est croissante.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 1 - \frac{1}{n+3}$
   Soit $n \in \mathbb{N}, t_{n+1} - t_n = 1 - \frac{1}{(n+1)+3} - \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) = 1 - \frac{1}{n+4} - 1 + \frac{1}{n+3}$
   $= -\frac{1(n+3)}{(n+4)(n+3)} + \frac{1(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \frac{-n-3+n+4}{(n+4)(n+3)} = \frac{1}{(n+4)(n+3)}$
   or $\forall n \in \mathbb{N}, n+4 > 0$ et $n+3 > 0$ donc
   $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+4)(n+3)} > 0$ et donc (t_n) est croissante.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{2^n}{5^n}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}, s_{n+1} - s_n = \frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{2^n}{5^n} = \frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{2^n 5}{5^n 5} = \frac{2^n 2 - 2^n 5}{5^{n+1}} = \frac{2^n(2-5)}{5^{n+1}} = -3\frac{2^n}{5^{n+1}}$
   or $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > 0$ et $5^{n+1} > 0$ et -3<0 donc
   $\forall n \in \mathbb{N}, -3\frac{2^n}{5^{n+1}} < 0$ et donc (s_n) est décroissante
6. $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \frac{2^n}{7^{n+1}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} - z_n = \frac{2^{n+1}}{7^{n+1+1}} - \frac{2^n}{7^{n+1}} = \frac{2^n 2}{7^{n+1} 7} - \frac{2^n 7}{7^{n+1} 7} = \frac{2^n(2-7)}{7^{n+1} 7} = -5\frac{2^n}{7^{n+2}}$
   or $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > 0$ et $7^{n+2} > 0$ et -5<0 donc
   $\forall n \in \mathbb{N}, -5\frac{2^n}{7^{n+2}} < 0$ et donc (z_n) est décroissante

Exercice 9. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, a_{n+1} = \frac{3a_n+2b_n}{5} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = 2 \\ \forall n \geq 0, b_{n+1} = \frac{2a_n+3b_n}{5} \end{cases}$

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

2. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = a_n + b_n$. Démontrer que la suite (s_n) est constante.

3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 3 - a_n$.

1. $a_1 = \frac{3a_0+2b_0}{5} = \frac{3\times1+2\times2}{5} = \frac{7}{5}$ $\quad b_1 = \frac{2a_0+3b_0}{5} = \frac{2\times1+3\times2}{5} = \frac{8}{5}$

$a_2 = \frac{3a_1+2b_1}{5} = \frac{3\times\frac{7}{5}+2\times\frac{8}{5}}{5} = \frac{\frac{21}{5}+\frac{16}{5}}{5} = \frac{\frac{37}{5}}{5} = \frac{37}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{37}{25}$ $\quad b_1 = \frac{2a_1+3b_1}{5} = \frac{2\times\frac{7}{5}+3\times\frac{8}{5}}{5} = \frac{\frac{14}{5}+\frac{24}{5}}{5} = \frac{\frac{38}{5}}{5} = \frac{38}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{38}{25}$

2. $s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{3a_n+2b_n}{5} + \frac{2a_n+3b_n}{5} = \frac{5a_n+5b_n}{5} = a_n + b_n = s_n$ et donc de par en par

$s_{n+1} = s_n = s_{n-1} = \cdots = s_1 = s_0$ or $s_0 = a_0 + b_0 = 1 + 2 = 3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 3$

Exercice 10. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

1. **a.** Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Quelle conjecture peut-on faire ?

2. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $d_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que (d_n) est constante.

b. En déduire que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$.

c. En déduire une démonstration de la conjecture faite en question **1.b.**.

1. a. Par définition, $u_2 = u_{0+2} = 2u_{0+1} - u_0 = 2u_1 - u_0 = 2 \times 1 - 0 = 2$. De même, $u_3 = 2u_2 - u_1 = 2 \times 2 - 1 = 3$ et $u_4 = 2u_3 - u_2 = 2 \times 3 - 2 = 4$.

   b. On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d_{n+1} = u_{(n+1)+1} + u_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$. Or, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ donc $d_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = d_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n$ donc (d_n) est constante.

   b. Par définition, $d_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ donc, comme (d_n) est constante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$ i.e. $u_{n+1} - u_n = 1$ et donc $u_{n+1} = u_n + 1$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = u_{n-1} + 1 = u_{n-2} + 1 + 1 = \cdots = u_0 + 1 + \cdots + 1 + 1 = 0 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n$ car la somme contient exactement n fois le nombre 1 (puisque, partant de u_n, il a fallu réécrire n fois la relation $u_k = u_{k-1} + 1$ pour aboutir à u_0).

Exercice 11. Étudier les variations des suites suivantes.

1. (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n)$.

2. (v_n) est définie par $v_0 = 3$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 2n$.

3. (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + n - 5$.

4. (t_n) est définie par $t_0 = 4$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + (-1)^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) - u_n = u_n - 2u_n^2 - u_n = -2u_n^2 \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $v_{n+1} - v_n = v_n - 2n - v_n = -2n \leqslant 0$ car $n \geqslant 0$. Ainsi, (v_n) est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $w_{n+1} - w_n = w_n + n - 5 - w_n = n - 5$. Or, $n - 5 \geqslant 0$ si et seulement si $n \geqslant 5$ donc (w_n) est croissante à partir du rang 5.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $t_{n+1} - t_n = t_n + (-1)^n - t_n = (-1)^n$. Or, si n est pair $(-1)^n \geqslant 0$ et, si n est impair, $(-1)^n \leqslant 0$. Ainsi, le signe de $t_{n+1} - t_n$ alterne avec la parité de n donc (t_n) n'est monotone à partir d'aucun rang.

Exercice 12. On considère la suite (u_n) définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$.

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les 10 premiers termes de (u_n) et conjecturer que (u_n) est monotone à partir d'un rang que l'on déterminera.

2. Démontrer la conjecture de la question précédente.

1. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^n \times 2}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^n \times 2 \times n^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{2^n(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{2^n(2n^2 - (n+1)^2)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(2n^2 - n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $2^n > 0$ et $n^2(n+1)^2 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $n^2 - 2n - 1$. Or, en utilisant la forme canonique, $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 1 - 1 = (n-1)^2 - 2$. Si on suppose $n \geqslant 3$ (conformément à notre conjecture) alors $n - 1 \geqslant 2$ donc $(n-1)^2 \geqslant 4$ donc $(n-1)^2 - 2 \geqslant 2$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante à partir du rang 3.

Exercice 13. On considère, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la suite (t_n) définie par $t_n = \frac{2^n}{n+2}$.

1. Justifier que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$.

2. Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 = \frac{n+1}{n+3}$.

3. En déduire le sens de variation de (t_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $2 > 0$ et $n \geqslant 0$, $2^n > 0$ et $n+1 > 0$ donc $t_n > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $t_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1+2} = \frac{2^n \times 2}{n+3}$ donc

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 = \frac{\frac{2^n \times 2}{n+3}}{\frac{2^n}{n+2}} - 1 = \frac{2^n \times 2}{n+3} \times \frac{n+2}{2^n} - 1 = \frac{2(n+2)}{n+3} - 1 = \frac{2n+4-(n+3)}{n+3} = \frac{n+1}{n+3}.$$

3. Comme $n \geqslant 0$, $n+1 \geqslant 0$ et $n+3 > 0$ donc $\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1 \geqslant 0$ et ainsi $\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqslant 1$. On conclut donc que (t_n) est croissante.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

$\forall\, n$ de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

a) On considère la fonction associée f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Démontrer que la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Correction

a) Étudions les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$. Pour cela, on va étudier le signe de la dérivée.

$f'(x) = \frac{0\times(x+1)-1\times 1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$

$\forall\, x$ de $[0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) < 0$, car $(x+1)^2$ est toujours strictement positif.

Donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

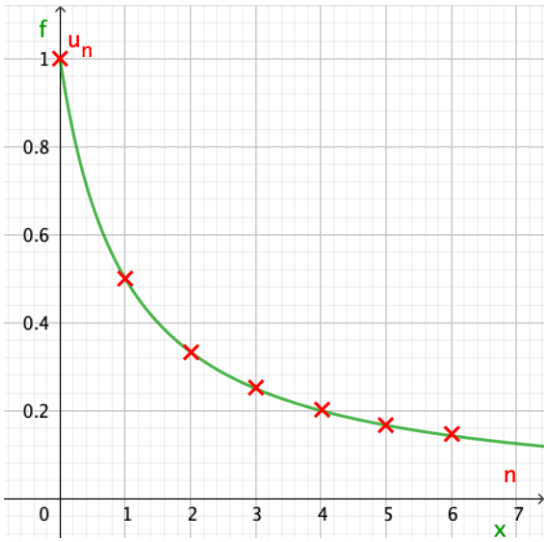
b) On a : $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

f est strictement décroissante $\forall\, x$ réel positif, donc :

f est strictement décroissante pour tout x entier positif, donc :

(u_n) est strictement décroissante pour tout n entier positif.

En effet, f et (u_n) ont la même expression et sont égales pour des valeurs entières positives.



Exercice 14.

On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = -3n + 4$ et $b_n = n^3$

Déterminer leur sens de variation.

Si on pose f et g les fonctions définies pour tout réel x par $f(x) = -3x + 4$ et $g(x) = x^3$

Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = f(n)$ et $b_n = g(n)$

Or f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et g est croissante sur cet intervalle.

On peut donc en déduire que (a_n) est décroissante et (b_n) est une suite croissante.

Méthode 8 : Conjecturer la limite d'une suite

1) Pour tout entier n, on donne : $u_n = n^2 + 1$.
Calculer u_0, u_1, u_2, u_{10} *et* u_{100}. La suite (u_n) semble-t-elle être convergente ou divergente ?

2) Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = (-1)^n v_n \end{cases}$.
Calculer des termes de la suite. La suite (v_n) semble-t-elle être convergente ou divergente ?

Correction

1) $u_0 = 0^2 + 1 = 1$,
$u_1 = 1^2 + 1 = 2$,
$u_2 = 2^2 + 1 = 5$,
$u_{10} = 10^2 + 1 = 101$,
$u_{100} = 100^2 + 1 = 10001$.

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.
La suite (u_n) semble diverger vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) $v_1 = (-1)^0 v_0 = 2$
$v_2 = (-1)^1 v_1 = -2$
$v_3 = (-1)^2 v_2 = -2$
$v_4 = (-1)^3 v_3 = 2$
$v_5 = (-1)^4 v_4 = 2$

Lorsque n augmente, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. La suite (v_n) semble diverger.

Exercice 15. Conjecturer les limites des suites suivantes.

1. La suite (u_n) définie par $u_n = -2n^2 + 4$ pour tout naturel n. Réponse:$-\infty$
2. La suite (v_n) définie par $v_n = -5n^2 - n + 3$ pour tout naturel n. Réponse:$-\infty$
3. La suite (w_n) définie par $w_n = \frac{7-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}-1}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 2. Réponse:-7
4. La suite (x_n)définie par $xn = \frac{1-0{,}12^n}{1-n^2}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 2. Réponse:0
5. La suite (y_n) définie par $yn = -n^5 + 3n^2 - n + 3$ pour tout naturel n. Réponse:$-\infty$
6. La suite(z_n) définie par $zn = \frac{-n^2+9}{n^2+7}$ pour tout naturel n . Réponse: -1

Méthode 9 : Déterminer un seuil à l'aide d'un algorithme

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1 \end{cases}$ Écrire un programme Python permettant de déterminer le rang de la suite à partir duquel les termes sont supérieurs à 8.

Correction

```python
u=2
n=0
while u<=8 :
    n=n+1
    u=0.9*u+1
print(f"on dépasse le seuil 8 pour n={n}, Un vaut alors {u}")
```

```
>>> seuil()
14
```

.

```
>>> # script executed
on dépasse le seuil 8 pour n=14, Un vaut alors 8.169856603603122
```

Exercice 16. Création de programme.

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 1{,}3u_n - 6 \end{cases}$

Ecrire un programme en Python déterminant le rang de la suite à partir duquel les termes sont supérieurs à 10000.

```
u=40
n=0
while u<=10000 :
    n=n+1
    u=1.3*u-6
print(f"on dépasse le seuil 10 000 pour n={n}, Un vaut alors {u}")
```

```
>>> # script executed
on dépasse le seuil 10 000 pour n=24, Un vaut alors 10876.015407487424
```

Exercice 17. Création de programme.

Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_4 = 70 \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 6 \end{cases}$

1. Écrire un programme Python permettant de déterminer n'importe quel terme dont on connait le rang.
2. Modifier le programme pour qu'il affiche aussi tous les termes qui précèdent celui qui est attendu.
3. Utiliser le programme pour conjecturer les variations et la limite de la suite.
4. Ecrire un nouveau programme en Python déterminant le rang de la suite à partir duquel les termes sont inférieurs à 30,1.

1.
```
def u(n):
    u=70
    for n in range(5,n+1):
        u=0.8*u+6
    return u
```

```
>>> u(5)
62.0
```

2.
```
def u(n):
    u=70
    for n in range(5,n+1):
        u=0.8*u+6
        print(f"u({n})={u}")
    return
```

```
>>> u(5)
u(5)=62.0
>>> u(10)
u(5)=62.0
u(6)=55.6
u(7)=50.48000000000004
u(8)=46.38400000000001
u(9)=43.107200000000006
u(10)=40.485760000000006
```

3. La suite semble converger vers 30.

4.
```
u=70
n=4
while u>=30.1 :
    n=n+1
    u=0.8*u+6
print(f"on dépasse le seuil 10 000 pour n={n}, Un vaut alors {u}")
```

```
>>> # script executed
on dépasse le seuil 10 000 pour n=31, Un vaut alors 30.096714065569177
```