

Contrôle : trigonométrie

Exercice 1. Notion de mesure principale (4pts)

Soit C le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\frac{263\pi}{4}$.

1. Déterminer la mesure principale du réel $\frac{263\pi}{4}$, c'est à dire déterminer le réel α de l'intervalle $] - \pi ; \pi]$ qui a le même point image C sur le cercle.
2. Déterminer le sinus et le cosinus de $\frac{263\pi}{4}$

Exercice 2. Lien entre le cosinus et le sinus d'un angle (4pts)

Soit $x \in]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$ tel que $\sin(x) = 0,6$ déterminer la valeur de $\cos(x)$

Exercice 3. A partir du cosinus de $\frac{\pi}{12}$ (6pts)

On admet dans cet exercice que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

1. Prouver que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est égal à $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ et aussi à $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
2. En déduire $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. Déjà vu ... ou presque (6pts)

Soit x est un réel. On considère l'équation (E) : $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

1. Résoudre l'équation (E) pour $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $] - \pi ; \pi]$.

Exercice 5. Équation du second degré? (5pts)

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$ (E)
2. Résoudre dans l'intervalle $] - \pi ; \pi]$ l'équation : $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$
Vous pourrez utiliser le résultat de la question 1°).

Contrôle : trigonométrie

Exercice 1. Notion de mesure principale

Soit C le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\frac{263\pi}{4}$.

1. Déterminer la mesure principale du réel $\frac{263\pi}{4}$, c'est à dire déterminer le réel α de l'intervalle $] - \pi ; \pi]$ qui a le même point image C sur le cercle.
2. Déterminer le sinus et le cosinus de $\frac{263\pi}{4}$

Exercice 2. Lien entre le cosinus et le sinus d'un angle

Soit $x \in]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$ tel que $\sin(x) = 0,6$ déterminer la valeur de $\cos(x)$

Exercice 3. A partir du cosinus de $\frac{\pi}{12}$

On admet dans cet exercice que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

1. Prouver que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est égal à $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ et aussi à $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
2. En déduire $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. Déjà vu ... ou presque

Soit x est un réel. On considère l'équation (E) : $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

1. Résoudre l'équation (E) pour $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $] - \pi ; \pi]$.

Exercice 5. Équation du second degré?

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$ (E)
2. Résoudre dans l'intervalle $] - \pi ; \pi]$ l'équation : $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$
Vous pourrez utiliser le résultat de la question 1°).

Exercice 1

1) Par division euclidienne on a : $263 = 4 \times 65 + 3$ et donc pour obtenir un nombre pair fois 4 on préfère : $263 = 4 \times 66 - 1$ De ce fait :

$$\frac{263\pi}{4} = 66\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 33 \times 2\pi \text{ soit } \frac{263\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

La mesure principale de $\frac{263\pi}{4}$ est donc $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$.

$$2) \sin\left(\frac{263\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{263\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 2

Soit $x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ tel que $\sin(x) = 0,6$ déterminer la valeur de $\cos(x)$

On sait que pour tout réel x on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\text{Ainsi on a : } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - 0,6^2 = 1 - 0,36 = 0,64$$

$$\text{Ainsi } \cos(x) = \sqrt{0,64} \text{ ou } \cos(x) = -\sqrt{0,64}$$

Or $x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ donc $\cos(x) < 0$ et donc $\cos(x) = -\sqrt{0,64}$

Exercice 3

• Pour tout réel x on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Nous avons déjà la valeur de

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \text{ soit : } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

• En utilisant l'identité trigonométrique, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16} \\ &= \frac{16}{16} - \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

• Attention, nous avons alors deux solutions possibles pour le sinus de $\frac{\pi}{12}$, qui sont

$$: \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ ou } -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Mais puisque l'angle $\frac{\pi}{12}$ est compris entre $[0; \pi]$, le sinus est nécessairement

$$\text{positif et seule la valeur positive est retenue. Donc : } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Est-ce que ça vaut $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$?

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{donc } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

2. En déduire $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ Nous savons \sin est une fonction impaire.

$$\text{Ainsi, } \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ Nous utilisons les identités suivantes :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta).$$

Donc, pour $\theta = \frac{\pi}{12}$, on obtient :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ Nous utilisons les identités trigonométriques suivantes :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta).$$

Ainsi, pour $\theta = \frac{\pi}{12}$, nous obtenons :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ Nous utilisons l'identité suivante pour les angles

complémentaires : $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$.

Donc, pour $\theta = \frac{\pi}{12}$, on a :

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 4

$$1) \sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \text{ avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} + \frac{2k'\pi}{3} \text{ avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k'\pi}{3} \text{ avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) On note $I =]-\pi; \pi]$.

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ si } k = 0 : x = \frac{\pi}{18} \in I$$

$$\bullet \text{ si } k = 1 : x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{18} \in I$$

- si $k = 2$: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} = \frac{25\pi}{18} \notin I$
- si $k = -1$: $x = \frac{\pi}{18} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{11\pi}{18} \in I$
- si $k = 2$: $x = \frac{\pi}{18} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{23\pi}{18} \notin I$

$$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z$$

- si $k = 0$: $x = \frac{5\pi}{18} \in I$
- si $k = 1$: $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{18} \in I$
- si $k = 2$: $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} = \frac{29\pi}{18} \notin I$
- si $k = -1$: $x = \frac{5\pi}{18} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{18} \in I$
- si $k = 2$: $x = \frac{5\pi}{18} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{19\pi}{18} \notin I$

Les 6 solutions de l'équation sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ sont donc :

$$S = \left\{ -\frac{11\pi}{18} ; -\frac{7\pi}{18} ; \frac{\pi}{18} ; \frac{5\pi}{18} ; \frac{13\pi}{18} ; \frac{17\pi}{18} \right\}$$

Exercice 5

1) L'équation $2X^2 - 3X - 2 = 0$ est du second degré de la forme :

$$aX^2 + bX + c = 0 \text{ avec : } a = 2, b = -3, c = -2$$

ainsi $\Delta = 25$.

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{4} = -0.5 \text{ et } X_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = 2$$

2) On applique les résultats précédents : $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \in [-1; 1] \\ 2X^2 - 3X - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ X_1 = -\frac{1}{2} \\ X_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = 2 \end{cases}$$

Un sinus étant toujours compris entre -1 et 1 seule la seconde équation aura des solutions.

$$(E) \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in Z$$

Les 2 solutions de l'équation sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ sont donc :

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6} \right\}$$

[https://www.math93.com/images/pdf/1re_speMaths/1speMaths-DS/1reSpeMaths-DS2024-](https://www.math93.com/images/pdf/1re_speMaths/1speMaths-DS/1reSpeMaths-DS2024-25/DS3_1reSpeMaths_2024_25_Trigonometrie_Proba.pdf)

[25/DS3_1reSpeMaths_2024_25_Trigonometrie_Proba.pdf](https://www.math93.com/images/pdf/1re_speMaths/1speMaths-DS/1reSpeMaths-DS2024-25/DS3_1reSpeMaths_2024_25_Trigonometrie_Proba.pdf)

[https://www.math93.com/images/pdf/1re_speMaths/1speMaths-](https://www.math93.com/images/pdf/1re_speMaths/1speMaths-DS/1reSpeMaths-DS2024-25/DS3_1reSpeMaths_2024_25_Trigonometrie_Proba-corr.pdf)

[DS/1reSpeMaths-DS2024-25/DS3_1reSpeMaths_2024_25_Trigonometrie_Proba-corr.pdf](https://www.math93.com/images/pdf/1re_speMaths/1speMaths-DS/1reSpeMaths-DS2024-25/DS3_1reSpeMaths_2024_25_Trigonometrie_Proba-corr.pdf)

Bonus

Exercice 3

Donner les valeurs des cosinus et sinus ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} A/ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & B/ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) & C/ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ D/ \cos(4008\pi) & & \\ E/ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & F/ \cos(11\pi) & G/ \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \\ H/ \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) & & \end{array}$$

Exercice 5

Résoudre les équations trigonométriques ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} A/ \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } x \in [0; \pi] & B/ \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } x \in [-\pi; 0] \\ C/ \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ et } x \in [0; \pi] & D/ \sin(x) = \frac{3}{2} \text{ et } x \in [0; \pi] \end{array}$$

Exercice 6

Résoudre les inéquations trigonométriques ci-dessous :

$$A/ \cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } x \in [-\pi; \pi] \quad B/ \sin(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } x \in [-\pi; 0]$$

Exercice 7 (bonus)

Résoudre l'équation ci-dessous dans $[0; 2\pi]$:

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos x$$

Exercice 2. A partir du cosinus de $\frac{\pi}{8}$

7 points

On admet dans cet exercice que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

1. Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Déterminer le sinus et cosinus de : $-\frac{\pi}{8}$.
3. Déterminer le sinus et cosinus de : $\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$.
4. Déterminer le sinus et cosinus de : $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$.
5. Déterminer le sinus et cosinus de : $\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Exercice 3

• Pour tout réel x on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Nous avons déjà la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, soit : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

• En utilisant l'identité trigonométrique, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{4}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

• Attention, nous avons alors deux solutions possibles pour le sinus de $\frac{\pi}{8}$, qui sont :

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Mais puisque l'angle $\frac{\pi}{8}$ est compris entre $[0; \pi]$, le sinus est nécessairement positif et seule la valeur positive est retenue.

• Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2) Nous savons que \cos est une fonction paire et \sin est une fonction impaire.

Ainsi, $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, et $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3) Nous utilisons les identités suivantes : $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$.

Donc, pour $\theta = \frac{\pi}{8}$, on obtient : $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, et

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

4) Nous utilisons les identités trigonométriques suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta).$$

Ainsi, pour $\theta = \frac{\pi}{8}$, nous obtenons :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

5) Nous utilisons l'identité suivante pour les angles complémentaires :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$. Donc, pour $\theta = \frac{\pi}{8}$, on a :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$