

## Devoir Noté : dérivées et fonctions trigonométriques

### Exercice 1 : Étude d'une fonction polynôme (7 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ .

1. Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .
2. Déterminer les racines de  $f'(x)$  et en déduire son signe sous forme de tableau.
3. Dresser le tableau de variations de  $f$  en précisant les valeurs des extrema locaux.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

### Exercice 2 : Fonction rationnelle (5 points)

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$ .

1. Montrer que  $h'(x) = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$ .
2. Étudier le signe de  $h'(x)$  sur l'intervalle donné.
3. En déduire les variations de  $h$ .

### Exercice 3 : Trigonométrie et arcs associés (4 points)

1. Déterminer la mesure principale de  $\theta = \frac{31\pi}{4}$ . Placer le point image sur le cercle trigonométrique.
2. Calculer la valeur exacte de :  $B = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .

### Exercice 4 : Recherche de valeurs et équations (4 points)

1. Soit  $x$  un réel tel que  $\cos(x) = -0,4$  et  $x \in [-\pi; 0]$ . Déterminer la valeur exacte de  $\sin(x)$ .
2. Résoudre dans  $] -\pi; \pi]$  l'équation :  $2\sin(x) - \sqrt{2} = 0$ .

## Corrigé

### Exercice 1 : Étude de fonction (7 pts)

- $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$ .
- Racines de  $f'(x)$  : On peut simplifier par 6 pour chercher les racines de  $x^2 + x - 2$ .  $\Delta = 12 - 4(1)(-2) = 9$ .  
 $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$  et  $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$ .  
 $f'(x) > 0$  sur  $] -\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $] -2; 1[$ .
- Variations** :  $f$  croît jusqu'à  $f(-2) = 21$ , décroît jusqu'à  $f(1) = -6$ , puis croît.
- Tangente en  $x = 1$  : Comme  $f'(1) = 0$ , la tangente est horizontale :  $y = -6$ .

### Exercice 2 : Fonction rationnelle (5 pts)

- $h'(x) = \frac{(2x)(x-1) - (x^2-3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$ .
- Le dénominateur est un carré positif. Pour le numérateur  $x^2 - 2x + 3$  :  
 $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8$ .  $\Delta < 0$ , donc le trinôme est toujours du signe de  $a=1$  (positif).
- $h'(x) > 0$  sur  $]1; +\infty[$ , donc **h est strictement croissante** sur cet intervalle.

### Exercice 3 : Trigonométrie (4 pts)

- Mesures principales :
  - $\frac{31\pi}{4} \div 2\pi = 3,875$ .  $\frac{31\pi}{4} - 4 \times 2\pi = \frac{31\pi}{4} - \frac{32\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$  cette mesure étant bien dans  $] -\pi; \pi]$  ça sera notre mesure principale
- $B = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### Exercice 4 : Recherche de valeurs (4 pts)

- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (-0,4)^2 = 1 - 0,16 = 0,84$ . Donc  $\sin x = \sqrt{0,84}$  ou  $\sin x = -\sqrt{0,84}$ . Comme  $x \in [-\pi; 0]$  (bas du cercle), le sinus est négatif. Ainsi  $\sin x = -\sqrt{0,84} \approx -0,92$ .
- $2\sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{ \dots; -\frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \dots \right\} \\ \text{ou} \\ x \in \left\{ \dots; -\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}; \dots \right\} \end{cases}$ .

Sur  $] -\pi; \pi]$ , les solutions sont  $x = \frac{\pi}{4}$  et  $x = \frac{3\pi}{4}$ .