Entraînement (Auto-évaluation)

Exercice 1 : Dérivation et étude de fonction (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ (utiliser le discriminant Δ).
3. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 2 : Application de la dérivation (5 points)

Soit g la fonction définie sur $I =]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

1. Justifier que g est dérivable sur I et calculer $g'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de g sur I.
3. La courbe de g admet-elle des tangentes horizontales ? Justifier.

Exercice 3 : Angles et mesures principales (4 points)

1. Donner la mesure principale des angles suivants : $\frac{17\pi}{3}$ et $-\frac{25\pi}{6}$.
2. À l'aide des angles associés, simplifier l'expression :

$$A = cos(x+\pi) + sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - cos(-x).$$

Exercice 4 : Équations et identités (4 points)

1. On sait que $sin(x) = \frac{4}{5}$ et que $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Déterminer la valeur exacte de $cos(x)$.
2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation : $2cos(x) + \sqrt{3} = 0$.

Corrigé rapide du Sujet A (Entraînement)

Exercice 1 : Dérivation

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 \Longrightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3.$

2. Signe de $f'(x)$:

   C'est un trinôme du second degré. $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16.$

   Racines : $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$. $f'(x)$ est du signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines (c'est-à-dire sur $[-1; 3]$) et sera négatif en dehors des racines, c'est-à-dire sur $]-\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty[$.

3. **Tableau :** f est croissante sur $]-\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 3]$, puis croissante sur $[3; +\infty[$. Valeurs : $f(-1) = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$ et $f(3) = -4$.

4. Tangente en 0 : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. $f'(0) = -3$ et $f(0) = 5$. Donc **T:y=−3x+5**.

Exercice 2 : Fonction rationnelle

1. $g = v\,u$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x - 2$. $g'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2(x-2)-(2x+1)(1)}{(x-2)^2}$. $\boldsymbol{g'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}}$.

2. Pour tout $x \in I, (x-2)^2 > 0$ et $-5 < 0$, donc $g'(x) < 0$. **g est strictement décroissante sur I**.

3. Une tangente est horizontale si $g'(x) = 0$. Or $-5 \neq 0$, donc **aucune tangente horizontale**.

Exercice 3 : Trigonométrie

1. Mesures principales :

   - $\frac{17\pi}{3} \div 2\pi \approx 2{,}83$. $\frac{17\pi}{3} - 3 \times 2\pi = \frac{17\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ cette mesure étant bien dans $]-\pi; \pi]$ ça sera notre mesure principale
   - $-\frac{25\pi}{6} \div 2\pi \approx -2{,}08$ $\;-\frac{25\pi}{6} - (-2)2\pi = -\frac{25\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ cette mesure étant bien ...

2. $A = cos(x + \pi) + sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - cos(-x) = (-cosx) + (cosx) - (cosx) = -cosx.$

Exercice 4 : Recherche de valeurs

1. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (0{,}6)^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$. Donc $\cos x = 0{,}8$ ou $\cos x = -0{,}8$. Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (2ème quadrant), le cosinus est négatif. $\boldsymbol{cos\,x = -0{,}8}$.

2. $2cosx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow cosx = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow cosx = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}. \Leftrightarrow$

   $\begin{cases} x \in \left\{\dots; -\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \dots\right\} \\ ou \\ x \in \left\{\dots; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \dots\right\} \end{cases}$ Sur]−π;π], les solutions sont $\frac{5\pi}{6}$ **et** $-\frac{5\pi}{6}$.