Fiche méthode : inéquation avec valeur absolue

Résoudre l'inéquation : $|2x-5|>4$

Solution

Pour s'affranchir des valeurs absolues il faut que je connaisse le signe de leur intérieur.

$2x-5\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 5 \Leftrightarrow x\geq \frac{5}{2}$

Quand l'intérieur est-il positif ?

Ainsi sur $[\frac{5}{2};+\infty[$

Si $a\geq 0$ je peux remplacer $|a|$ par a

$|2x-5|>4 \Leftrightarrow 2x-5>4$

je peux remplacer la valeur absolue par son intérieur

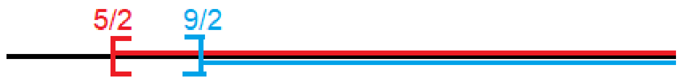
$\Leftrightarrow 2x>5+4 \Leftrightarrow x>\frac{9}{2}$

On n'est pas obligé mais il est fortement conseillé de faire une représentation graphique des solutions et de l'intervalle de travail

$\Leftrightarrow x\in]\frac{9}{2};+\infty[$

Toutes ces solutions sont dans $[\frac{5}{2};+\infty[$

donc elles sont acceptables. $S_1=]\frac{9}{2};+\infty[$



$2x-5\leq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 5 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{2}$

Ainsi sur $]-\infty;\frac{5}{2}[$

$|2x-5|>4 \Leftrightarrow -(2x-5)>4$

je peux remplacer la valeur absolue par l'opposé de son intérieur

$\Leftrightarrow -2x>-5+4 \Leftrightarrow -2x>-1$

Si $a\leq 0$ je peux remplacer $|a|$ par $-a$

$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in]-\infty;1/2[$

Toutes ces solutions sont dans $]-\infty;\frac{5}{2}]$

donc elles sont acceptables.

Reformulation possible : $S_2=]-\infty;\frac{5}{2}]\cap]-\infty;\frac{1}{2}]=]-\infty;\frac{1}{2}]$

Ainsi $S=S_1\cup S_2=]-\infty;\frac{1}{2}[\cup]\frac{9}{2};+\infty[$

Résoudre l'inéquation : $|2x-5|\leq 4$

Solution

$2x-5\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 5 \Leftrightarrow x\geq \frac{5}{2}$

Quand l'intérieur est-il positif ?

Ainsi sur $[\frac{5}{2};+\infty[$

Si $a\geq 0$ je peux remplacer $|a|$ par a

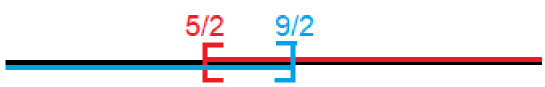
$|2x-5|\leq 4 \Leftrightarrow 2x-5\leq 4$

je peux remplacer la valeur absolue par son intérieur

$\Leftrightarrow 2x\leq 5+4 \Leftrightarrow x\leq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;\frac{9}{2}]$

$S_1=\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\cap\left]-\infty;\frac{9}{2}\right]=\left[\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right]$



$2x-5\leq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 5 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{2}$

Quand l'intérieur est-il négatif ?

Ainsi sur $]-\infty;\frac{5}{2}[$

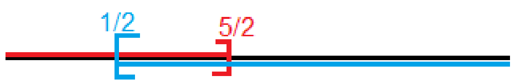
Si $a\leq 0$ je peux remplacer $|a|$ par $-a$

$|2x-5|\leq 4 \Leftrightarrow -(2x-5)\leq 4$

Je peux remplacer la valeur absolue par l'opposé de son intérieur

$\Leftrightarrow -2x\leq -5+4 \Leftrightarrow -2x\leq -1$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in[\frac{1}{2};+\infty[$



$S_2=]-\infty;\frac{5}{2}]\cap[\frac{1}{2};+\infty[=\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$

Ainsi

$S=S_1\cup S_2=\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right]=\left[\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right]$

Compétence : Résolution d'une équation / inéquations contenant plusieurs valeurs absolues

<table>
<tr><td>$|2x+6|-|7-3x|=4$</td><td>Méthode</td></tr>
<tr><td>$2x+6\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -6 \Leftrightarrow x\geq -\frac{6}{2} \Leftrightarrow x\geq -3$

$7-3x \Leftrightarrow -3x\geq -7 \Leftrightarrow x\leq \frac{-3}{-7} \Leftrightarrow x\leq \frac{3}{7}$</td><td>On commence par déterminer sous quelles conditions les intérieurs des différentes valeurs absolues sont positives. Dans ces cas les valeurs absolues seront remplacées par leur intérieur, dans le cas contraire par l'opposé de leur intérieur</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Intervalles</td><td>$]-\infty;-3]$</td><td>$\left[-3;\frac{3}{7}\right]$</td><td>$[\frac{3}{7};+\infty[$</td></tr>
<tr><td>$2x+6$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$7-3x$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$|2x+6|$</td><td>$-2x-6$</td><td>$2x+6$</td><td>$2x+6$</td></tr>
<tr><td>$|7-3x|$</td><td>$7-3x$</td><td>$7-3x$</td><td>$-7+3x$</td></tr>
</table>
</td><td>On fait un tableau récapitulant les différentes zones possibles (délimitées par $-\infty$, $+\infty$, et toutes les valeurs butoirs trouvées à l'étape précédente)
Les deux lignes donnant les signes des intérieurs des valeurs absolues sont facultatives mais elles sont intéressantes pour bien comprendre pourquoi les valeurs absolues sont remplacées par leurs intérieurs ou leurs opposés.</td></tr>
<tr><td>Sur $]-\infty;-3]$, $|2x+6|-|7-3x|=4$
$\Leftrightarrow (-2x-6)-(7-3x)=4$
$\Leftrightarrow -2x-6-7+3x=4$
$\Leftrightarrow x-13=4 \Leftrightarrow x=17$
$S_1=\{17\}\cap]-\infty;-3]=\emptyset$</td><td>Pour chaque zone du tableau, on exprime l'équation simplifiée (débarrassée de ses valeurs absolues).
Une fois que c'est fait on les résout, et on regarde des solutions trouvées celles qui sont dans l'intervalle sur lequel on travaille.</td></tr>
<tr><td>Sur $\left[-3;\frac{3}{7}\right]$, $|2x+6|-|7-3x|=4$
$\Leftrightarrow (2x+6)-(7-3x)=4$
$\Leftrightarrow 2x+6-7+3x=4$
$\Leftrightarrow 5x-1=4 \Leftrightarrow 5x=4+1$
$\Leftrightarrow x=1$ $\quad S_2=\{1\}\cap\left[-3;\frac{3}{7}\right]=\{1\}$</td><td>Idem

Remarque : il vaut mieux remplacer les valeurs absolues par le bon contenu protégé par des parenthèses pour éviter des erreurs de signe.</td></tr>
<tr><td>Sur $[\frac{3}{7};+\infty[$, $|2x+6|-|7-3x|=4$
$\Leftrightarrow (2x+6)-(-7+3x)=4$
$\Leftrightarrow 2x+6+7-3x=4$ $\Leftrightarrow -x+13=4$
$\Leftrightarrow -x=4-13 \Leftrightarrow x=9$
$S_3=\{9\}\cap [\frac{3}{7};+\infty[=\{9\}$</td><td>idem</td></tr>
<tr><td>$S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{1;9\}$</td><td>On concatène les ensembles de solutions</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$|2x+6|-|7-3x|>4$</td><td>Méthode</td></tr>
<tr><td></td><td>Les deux premières étapes sont identiques à celles faites pour la résolution de l'équation (précédente)</td></tr>
<tr><td>Sur $]-\infty;-3]$, $|2x+6|-|7-3x|>4$
$\Leftrightarrow (-2x-6)-(7-3x)>4$
$\Leftrightarrow -2x-6-7+3x>4$
$\Leftrightarrow x-13=4 \Leftrightarrow x>17$
$S_1=]17;+\infty[,\cap]-\infty;-3]=\emptyset$</td><td>Pour chaque zone du tableau, on exprime l'équation simplifiée (débarrassée de ses valeurs absolues).
Une fois que c'est fait on les résout, et on regarde des solutions trouvées celles qui sont dans l'intervalle sur lequel on travaille.</td></tr>
<tr><td>Sur $\left[-3;\frac{3}{7}\right]$, $|2x+6|-|7-3x|>4$
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>1$
$S_2=]1;+\infty[\cap\left[-3;\frac{3}{7}\right]=]1;\frac{3}{7}]$</td><td>idem</td></tr>
<tr><td>Sur $[\frac{3}{7};+\infty[$, $|2x+6|-|7-3x|>4$
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -x>4-13 \Leftrightarrow x<9$
$S_3=]-\infty;9[\cap [\frac{3}{7};+\infty[=[\frac{3}{7};9[$</td><td>idem</td></tr>
<tr><td>$S=S_1\cup S_2\cup S_3=]1;\frac{3}{7}]\cup[\frac{3}{7};9[=]1;9[$</td><td>On concatène les ensembles de solutions</td></tr>
</table>