

Inéquations avec valeurs absolues :

Résoudre : $|2x - 7| < -3$ (I_1) $|2 + 5x| + 7 > -2x$ (I_2) $-3x + 5 \leq |7 + 5x|$ (I_3)

Correction :

(I_1) Une valeur absolue ne pouvant être négative la première inéquation n'aura pas de solution.

(I_2) regardons sur quel intervalle la valeur absolue vaut son intérieure et sur quel intervalle l'opposé de celui-ci.

$$2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

Donc sur $[-\frac{2}{5}; +\infty[$ on aura : (I_2) $\Leftrightarrow 2 + 5x + 7 > -2x \Leftrightarrow 5x + 2x > -2 - 7 \Leftrightarrow x > -\frac{9}{7}$

$$S_1 =]-\frac{9}{7}; +\infty[\cap [-\frac{2}{5}; +\infty[= [-\frac{2}{5}; +\infty[$$

$$2 + 5x \leq 0 \Leftrightarrow 5x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{5}$$

Donc sur $]-\infty; -\frac{2}{5}]$ on aura : (I_2) $\Leftrightarrow -2 - 5x + 7 > -2x \Leftrightarrow -5x + 2x > 2 - 7 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{3}$

$$S_2 =]-\infty; \frac{5}{3}[\cap]-\infty; -\frac{2}{5}] =]-\infty; -\frac{2}{5}]$$

$S = S_1 \cup S_2 = R$ Remarque : Ça ne ressemble pas du tout au résultat habituel, en même temps l'inéquation est aussi différente des cas vus précédemment, elle contient du x à l'extérieur de la valeur absolue.

(I_3) deux valeurs absolues, ça veut dire deux changements, deux valeurs butoir et donc trois zones à considérer

$$-3x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$$

Donc $|-3x + 5|$ peut être remplacé par $-3x + 5$ avant $\frac{5}{3}$ et par $3x - 5$ après

$$7 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{5}$$

Donc $|7 + 5x|$ peut être remplacé par $7 + 5x$ après $-\frac{7}{5}$ et par $-7 - 5x$ après

Pour résumer on a trois zones : $]-\infty; -\frac{7}{5}]$, $[-\frac{7}{5}; \frac{5}{3}]$ et $[\frac{5}{3}; +\infty[$

$$\text{Sur }]-\infty; -\frac{7}{5}], |-3x + 5| \leq |7 + 5x| \Leftrightarrow -3x + 5 \leq -7 - 5x \Leftrightarrow 5x - 3x \leq -7 - 5 \Leftrightarrow x \leq -\frac{12}{2}$$

Ainsi sur cette zone les solutions sont $S_1 =]-\infty; -6] \cap]-\infty; -\frac{7}{5}] =]-\infty; -6]$

$$\text{Sur } [-\frac{7}{5}; \frac{5}{3}], |-3x + 5| \leq |7 + 5x| \Leftrightarrow -3x + 5 \leq 7 + 5x \Leftrightarrow -5x - 3x \leq 7 - 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{-8}$$

Ainsi sur cette zone les solutions sont $S_2 = [-\frac{1}{4}; \infty[\cap [-\frac{7}{5}; \frac{5}{3}] = [-\frac{1}{4}; \frac{5}{3}]$

$$\text{Sur } [\frac{5}{3}; +\infty[, |-3x + 5| \leq |7 + 5x| \Leftrightarrow 3x - 5 \leq 7 + 5x \Leftrightarrow -5x - 3x \leq 7 + 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{12}{-8}$$

Ainsi sur cette zone les solutions sont $S_3 = [\frac{3}{2}; \infty[\cap [\frac{5}{3}; +\infty[= [\frac{5}{3}; +\infty[$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty; -6] \cup [-\frac{1}{4}; \frac{5}{3}] \cup [\frac{5}{3}; +\infty[=]-\infty; -6] \cup [-\frac{1}{4}; +\infty[$$