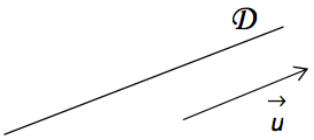
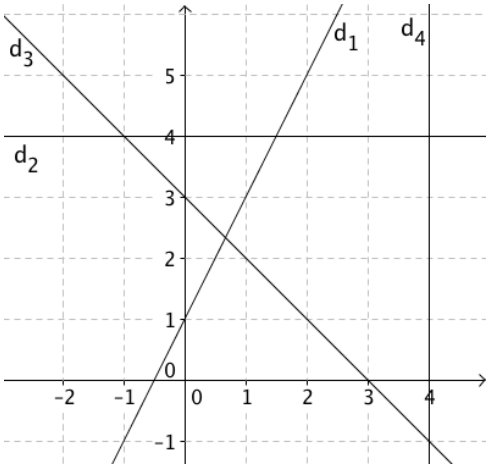
DROITES DU PLAN

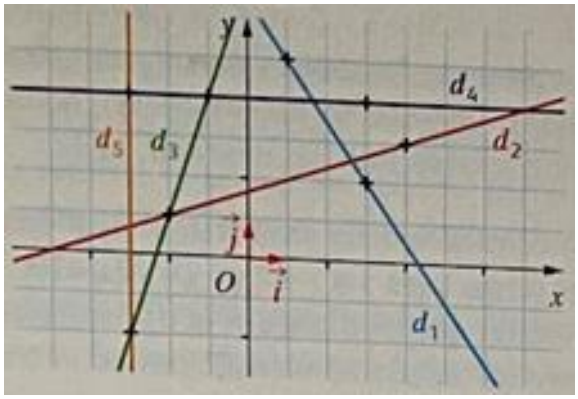
I. Vecteur directeur d'une droite

Définition :
D est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D.



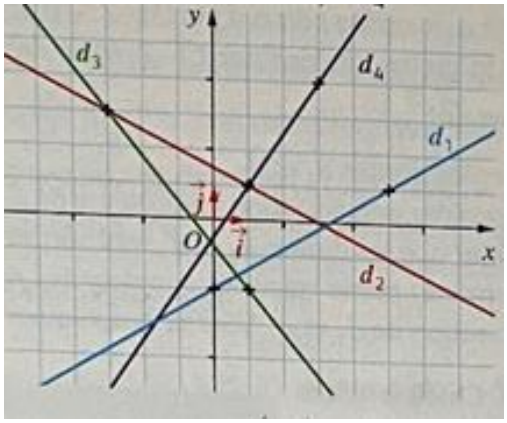
Méthode 1 : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.





Exercice 1
Pour chaque droite lire les coordonnées d'un de leur vecteur directeur.

Exercice 2
chacune des droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) :
Associer un de leurs vecteurs directeur parmi les suivants :
$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\2{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}16\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\0{,}6\end{pmatrix}$
Proposer un autre vecteur directeur.



II. Équation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :
Toute droite *D* admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Un vecteur directeur de *D* est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite *D*.

Exemple :
Soit une droite *d* d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (5 ; 4) est un vecteur directeur de *d*.

Théorème réciproque :
L'ensemble des points M(*x* ; *y*) tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est une droite *D* de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

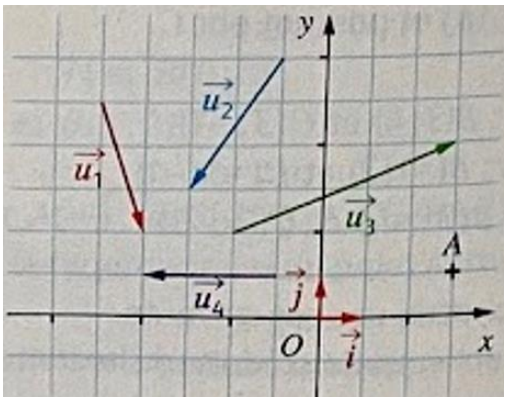
Méthode 2 : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur
On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point *A*(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (–1 ; 5).

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points *B*(5 ; 3) et *C*(1 ; –3).

Exercice 3
Donner un vecteur directeur pour chacune des deux droites suivantes :
(d) : $4x - 3y + 1 = 0$ (d') : $x - 5y + 2 = 0$

Exercice 4
Dans le repère ci-contre on considère le point $A(3\,;1)$ et les vecteur $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$.
On considère les droites (d_1), à (d_4) passant par A et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ à $\overrightarrow{u_4}$.

1. Tracer les quatre droites.
2. Lire les coordonnées des quatre vecteurs.
3. Déterminer pour chaque droite une de ses équations cartésiennes.



Méthode 3 : Tracer une droite dans un repère
Tracer la droite d'équation $-3x + 4y + 5 = 0$

Exercice 5
Tracer la droite (D) d'équation $7x - 2y + 3 = 0$

III. Équation réduite d'une droite

1) De l'équation cartésienne à l'équation réduite

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite *D* peut être ramenée à une équation réduite $y = mx + p$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Vocabulaire : - *m* est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite *D*.
- *p* est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite *D*.

Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

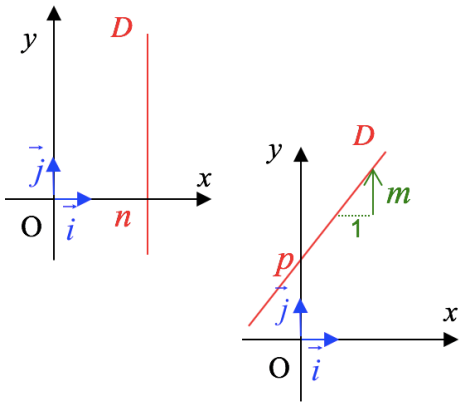
- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite *D* peut être ramenée à l'équation réduite $x = -\frac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite *D* est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple : Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

Propriété :
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.Soit *D* une droite du plan.

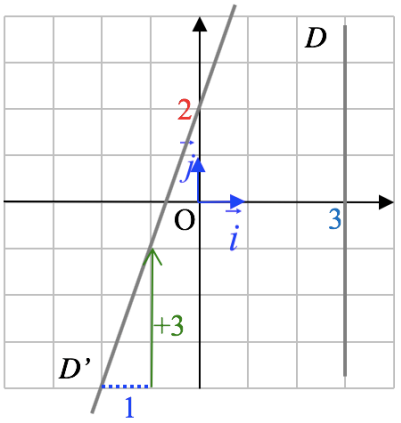
- Si *D* est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de *D* est de la forme *x = n*,
où *n* est un nombre réel.

- Si *D* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de *D* est de la forme *y = mx + p*,
où *m* et *p* sont deux nombres réels.



Exercice 6
Donner l'équations réduite des droites ayant les équations cartésiennes suivantes :
$(D_1) : 5x + 4y - 7 = 0$ $(D_2) : -3x + 12 = 0$
$(D_3) : -5x - 7y + 8 = 0$ $(D_4) : 8y + 11 = 0$

Exercice 7 :
Si c'est pertinent, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de :
1) chacune des droites d'équations :
a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$
2) des droites dessinées sur la figure ci-contre :



Méthode 4 : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dans ce repère, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations réduites respectives :
$y = 2x + 3$, $y = 4$, $x = 3$.

Propriété réciproque :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul.
L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ sont tels que :
$y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Méthode 5 : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Les points $A(6{,}4;42)$ et $B(346;2419)$ appartiennent-ils à la droite d d'équation $y = 7x - 3$?

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l'équation de la droite (BC).

Exercice 8
Déterminer la valeur du réel t tel que le point A appartienne à la droite d :

a) $d: 2x + 3y - 1 = 0$ et $A(2;t)$
b) $d: -x + 4y + 8 = 0$ et $A(t;4)$
c) $d: -5x + 4y + 2 = 0$ et $A(t;t)$

Exercice 9
Soit la droite passant par $A(5;-1)$ et $B(3;2)$ déterminer son équation.
Déterminer t tel que $C(t;4) \in (AB)$

Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement :

2) Pente d'une droite

Propriété :
Si A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode 6 : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit A$(4;-1)$ et $B(3\,;5)$ deux points d'une droite d.
Déterminer une équation de la droite d.

Exercice 10

Déterminer le coefficent directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite passant par les points A et B dans les trois cas suivants :

1) $A(2;3)$ $B(-1;2)$ $A(7;8)$ et $B(7;9)$
2) $A(-5;4)$ $B(3;1)$

Exercice 11 ALGORITHME

```
def droite(xA,yA,xB,yB):
    m=...
    p=...
    print('y=',m,'x+',p)
```

Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés et servez vous en pour compléter les lignes 2 et 3.

IV. Position relative de deux droites

1) A partir l'aide de l'équation cartésienne

Propriété :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dire que *D* et *D'* sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode 7 : Démontrer que deux droites sont parallèles

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

Le vecteur $\vec{u}(10\,;6)$ est un vecteur directeur de la droite d_1.
Le vecteur $\vec{v}(-15\,;-9)$ est un vecteur directeur de la droite d_2.
Calculons $det(\vec{u}\,;\vec{v})$:

$$det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

Exercice 12

Soit (d) et (d') deux droites. Dire si elles sont parallèles.

a) $(d) : 2x - 6y + 5 = 0$ et $(d') : x - 3y + 2 = 0$
b) $(d) : 4x - 3y + 1 = 0$ et $(d') : 5x - 4y + 2 = 0$

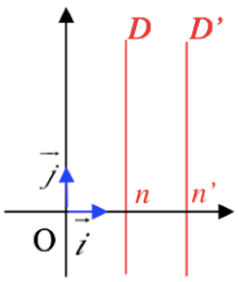
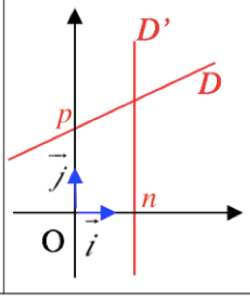
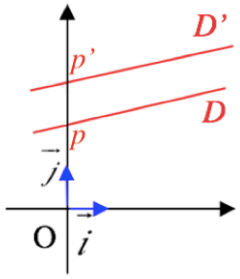
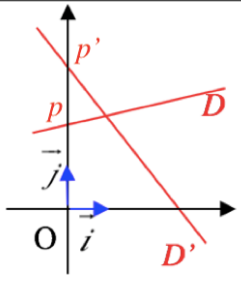
Exercice 13

Déterminer l'équation de (d') l'équation de la droite passant par $A(4;-3)$ et parallèle à la droite d: $-2x + 7y - 5 = 0$.

2) A l'aide de l'équation réduite

Propriété :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit *D* et *D'* deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Dire que *D* et *D'* sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Tableau récapitulatif :

Equation de D	$x = n$	$y = mx + p$	$y = mx + p$	
Equation de D'	$x = n'$	$x = n$	$y = m'x + p'$	
Position de D et D'	D // D'	D et D' sont sécantes	Si $m = m'$	Si $m \neq m'$
			D // D'	D et D' sont sécantes
Représentation				

Exemples :
Dans un repère du plan, d_1, d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :
$y = 3x + 4$, $y = 3x + 9$, $x = 8$
Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.
Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

Exercice 14
Soit $M(2;5)$, $N(1;8)$ et $P(4;-1)$. On pose les équations réduites des deux droites :
$(MN): y = mx + p$ et $(MP): y = m'x + p'$

1) Déterminer m et m'
2) D'après ce qui précède peut on dire que les points M, N et P sont alignés ?