Parité

I. Nombres entiers

1. Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$**.**
$\mathbb{N}$= {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; … }. Exemples : $4 \in \mathbb{N}$ $-2 \notin \mathbb{N}$

2. Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$**.**
$\mathbb{Z}$ = {… ; −3 ; −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … }. Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$ $5 \in \mathbb{Z}$ $0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

II. Nombres pairs, impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples : 34, 68 et 0 sont des nombres pairs 567, 871 et 1 sont des nombres impairs.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :
Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k + 1$, avec k entier.
Donc $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$, avec $q = 2k^2 + 2k$.
q est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2q + 1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n + 1$.

- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.

Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :

$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2q$, avec $q = k(2k+1)$ entier.

Donc $n(n+1)$ est pair.

- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$, avec k entier.

Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :

$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2q'$, avec $q' = (2k+1)(k+1)$ entier.

Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Exercices sur la parité de nombres

Exercice 1 Parmi la liste de nombres suivante déterminer lesquels sont pairs :

$25+15$ 5^2 $\sqrt{36}$ $\frac{378}{3}$ $\frac{154}{3}$ 15^2-8

Parmi la liste de nombres suivante déterminer lesquels sont pairs :

$25+15=40=2\times 10$ donc c'est un nombre pair

$5^2=25=2\times 12+1$ donc c'est un nombre impair

$\sqrt{36}=6=2\times 3$ donc c'est un nombre pair

$\frac{378}{3}=126=2\times 63$ donc c'est un nombre pair

$\frac{154}{3}$ n'est pas un entier donc c'est un nombre ni pair ni impair

$15^2-8=225-8=2\times 108+1$ donc c'est un nombre impair

Exercice 2 Montrer que le carré d'un nombre pair est pair.

Montrer que le carré d'un nombre pair est pair.

Soit n un nombre pair, alors par définition il existe un nombre entier k tel que $n=2k$ et ainsi $n^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2=2q$ avec $q=2k^2$ un entier (car produit d'entiers) donc n^2 est bien pair.

Exercice 3 Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est pair.

Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est pair.

Soit n le plus petit des trois entiers, le produit étudié est donc $P=n(n+1)(n+2)$

D'après le cours je sais que le produit de deux entiers consécutifs est pair, donc le produit des deux premiers nombres $n(n+1)$ est pair, et donc son résultat peut s'écrire sous la forme $2k$.

Le grand produit vaut donc $P=2k(n+2)=2(k(n+2))=2q$ avec $q=k(n+2)$ un entier (car produit d'entiers) donc le grand produit est donc P est pair

Exercice 4 On considère un entier naturel n.

1) Étudier la parité des nombres suivants : $A=2n+6$ $B=6n+8$ $C=40n+1$
2) Montrer que $A+C$ est un multiple de 7. Autrement dit qu'on peut écrire $A+C=7k$ avec k un entier.

On considère un entier naturel n.

1) Étudier la parité des nombres suivants :
   $A=2n+6=2(n+3)=2q$ avec $q=n+3$ un entier (somme d'entiers) donc A est pair.
   $B=6n+8=2(3n+4)=2q$ avec $q=3n+4$ un entier (somme et produits d'entiers) donc B est pair.
   $C=40n+1=2(20n)+1=2q+1$ avec $q=20n$ un entier (produits d'entiers) donc C est impair.
2) Montrer que $A+C$ est un multiple de 7.
   $A+C=2n+6+40n+1=42n+7=7(6n+1)=7q$ avec $q=6n+1$ un entier (somme et produits d'entiers) donc $A+C$ est un multiple de 7.

Exercice 5 Pour tout entier naturel n montrer que $5n^2+3n$ est un nombre pair.

Pour tout entier naturel n montrer que $5n^2+3n$ est un nombre pair.

$5n^2+3n=n(5n+3)$

Cas 1 : n est pair

Il existe donc un nombre entier k tel que $n=2k$ et donc $5n^2+3n=2k(5\times 2k+3)=2q$ avec $q=10k+3$ un entier (somme et produits d'entiers) donc $5n^2+3n$ est pair.

Cas 2 : n est impair

Il existe donc un nombre entier k tel que $n=2k+1$ et donc $5n^2+3n=(2k+1)(5(2k+1)+3)=(2k+1)(10k+5+3)=(2k+1)2(5k+3)=2q'$ avec $q'=(2k+1)(5k+3)$ un entier (somme et produits d'entiers) donc $5n^2+3n$ est pair.

Exercice 6 La somme de deux entiers consécutifs est-elle paire ou impaire ?

La somme de deux entiers consécutifs est-elle paire ou impaire ?

Soit deux entiers consécutifs, on appelle n le plus petit d'entre eux. La somme est donc $S=n+(n+1)=2n+1$ avec n entier donc S est impaire.

Remarque : on aurait pu être tenté de faire l'étude suivant la parité de n, ça fonctionne mais c'est plus long.

Exercice 7 On considère un entier k. Déterminer la parité de $(k+1)^2 - k^2$.

On considère un entier k. Déterminer la parité de $(k+1)^2 - k^2$

$(k+1)^2 - k^2 = (k+1-k)(k+1+k) = 1(2k+1) = 2k+1$ or k est un entier donc cette expression est impaire.

Exercice 8

Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

Remarque : La division euclidienne de a par b donne un quotient q et un reste r tels que $a = bq + r$

On cherche donc à prouver que le carré est de la forme $8q+1$ avec q un entier.

Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

Soit n un nombre impair, il existe donc un entier k tel que $n = 2k+1$

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1)$

$k(k+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs donc d'après le cours ce nombre est pairs et donc il peut s'écrire sous la forme $2q$ avec q un entiers.

Ainsi $n^2 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$ donc le résultat de la division euclidienne de n^2 par 8 est 1.

Exercice 9 (à faire une fois que le 8 est compris)

On considère deux entiers naturels impairs a et b.

Montrer que $N = a^2 + b^2 + 6$ est divisible par 8.

Comme a et b sont deux entiers naturels impairs il existe k et k' deux entiers tels que $a = 2k+1$ et $b = 2k'+1$.

Ainsi $N = a^2 + b^2 + 6 = (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 + 6 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 + 6$

$= 4k^2 + 4k + 4k'^2 + 4k' + 8 = 4k(k+1) + 4k'(k'+1) + 8$

$k(k+1)$ et $k'(k'+1)$ sont des produits de deux entiers consécutifs donc d'après le cours ces nombres sont pairs et donc ils peuvent s'écrire respectivement sous la forme $2q$ et $2q'$ avec q et q' deux entiers.

Ainsi : $N = 4 \times 2q + 4 \times 2q' + 8 = 8(q + q' + 1) = 8q''$ avec $q'' = q + q' + 1$ un entier en tant que somme d'entiers. N est donc multiple de 8 (est divisible par 8).

Exercice 10 On s'intéresse à la parité de la somme de quatre entiers consécutifs

1) Tester cette somme avec de vraies valeurs que vous choisirez et conjecturer la parité de la somme.
2) Soit n votre premier entier, exprimer les valeurs des 3 entiers qui le suivent en fonction de n

Prouver la conjecture de la première question.

1) 7+8+9+10=34 j'ai l'impression que la somme est paire.
2) Les quatre entiers sont n, $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$
3) $n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$
   $= n + n + 1 + n + 2 + n + 3$
   $= 4n + 6 = 2 \times 2n + 2 \times 3$
   $= 2(2n+3)$
   $= 2k$avec $k = 2n+3$ un entier donc n est pair

Exercice 11 Soit n un entier.

1. Supposons que n est pair. Démontre que son carré n^2 est divisible par 4.
2. On suppose que n est impair. Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 1.

1) Supposons que n est pair autrement dit supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. On aura alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, or k étant un entier naturel k^2 en sera aussi un. On peut donc dire que $n^2 = 4k'$ avec $k' = k^2$ un entier naturel donc n^2 est divisible par 4.
2) Supposons maintenant que n est impair autrement dit supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$+1.

On aura alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, or k étant un entier naturel k^2 en sera aussi un. On peut donc dire que $n^2 = 4k' + 1$ avec $k' = k^2 + k$ un entier naturel donc le reste de la division euclidienne de n^2 par 4.

Exercice 12

Soit a et b deux entiers relatifs.

1. On suppose que a est pair et b est impair. Préciser la parité des nombres suivants :
2. $2a + 3b$ $a^2 - b^2$ $9a + 4b$
3. Mêmes questions quand a et b sont tous deux impairs.

Exercice 12

1) Supposons que a est pair et b est impair.
   a. 2 est pair et a aussi donc d'après la propriété 1, $2a$ est pair
      3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
      et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.
   b. a est pair donc d'après la propriété 1 donc a^2 est pair
      b est impair donc d'après la propriété 2 donc b^2 est impair
      Donc $a^2 - b^2$ d'après la propriété 5 est impair.
   c. 9 est impair et a est pair donc d'après la propriété 3, $9a$ est pair
      4 est pair et b est impair donc d'après la propriété 3, $4b$ est pair
      et donc d'après la propriété 4, $9a + 4b$ est pair.
2) Supposons que a et b sont impair.
   a. 2 est pair et a est impair aussi donc d'après la propriété 3, $2a$ est pair
      3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
      et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.
   b. a est impair donc d'après la propriété 2 donc a^2 est impair
      b est impair donc d'après la propriété 2 donc b^2 est impair
      Donc $a^2 - b^2$ d'après la propriété 4 est pair.
   c. 9 est impair et a est impair donc d'après la propriété 2, $9a$ est impair
      4 est pair et b est impair donc d'après la propriété 3, $4b$ est pair
      et donc d'après la propriété 4, $9a + 4b$ est impair.