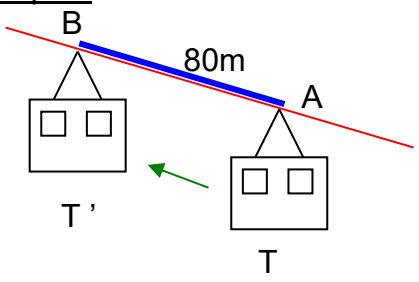
LES VECTEURS

I. Translation

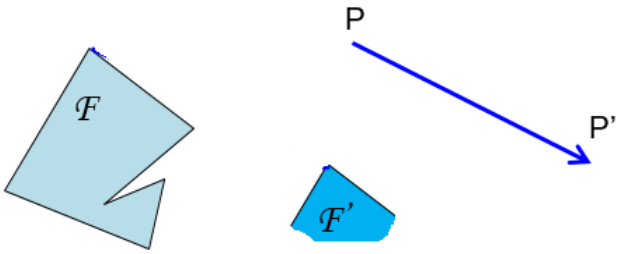
Exemple :



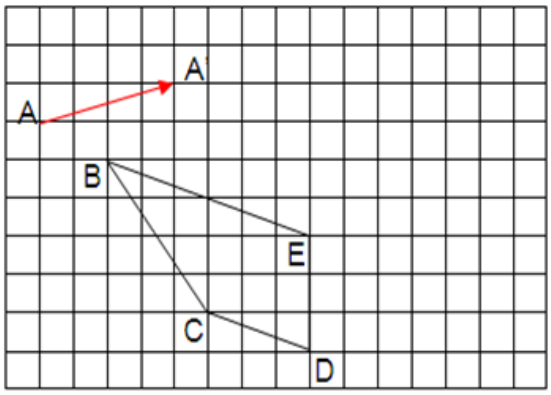
Une translation est un glissement :
- avec une direction donnée :
  câble du téléphérique, la droite (AB),
- avec un sens donné :
  le téléphérique monte de A vers B,
- avec une longueur donnée :
  80m, longueur AB

On dit que : Le téléphérique T' est l'image du téléphérique T par la translation qui transforme A en B.

Définition :
Soit P et P' deux points distincts du plan.
On appelle **translation** qui envoie P sur P' la transformation dont l'image $\mathcal{F}'$ d'une figure $\mathcal{F}$ est obtenue en faisant glisser la figure $\mathcal{F}$:
- selon la direction de la droite (PP'),
- dans le sens de P vers P',
- d'une longueur égale à PP'.



Méthode 1 : Construire l'image d'une figure par une translation
Soit ***t*** la translation qui transforme A en A'.
Construire l'image B'C'D'E' du trapèze BCDE par la translation ***t***.



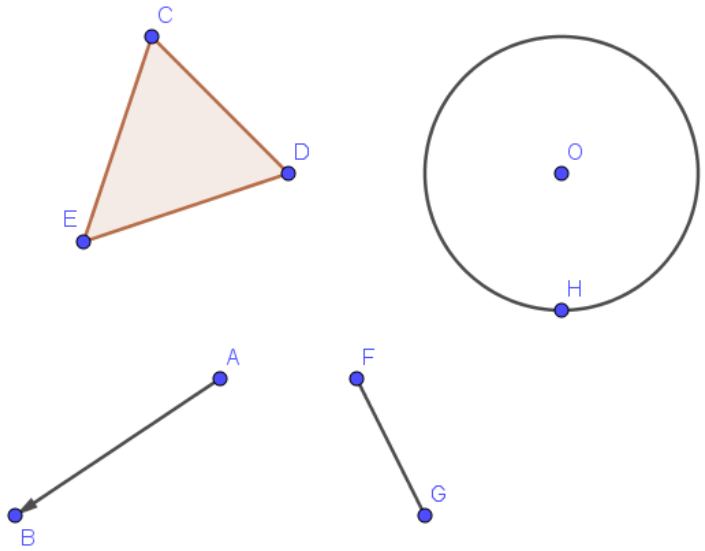
II. Vecteurs

1. Définition :

Définition :
Soit ***t*** la translation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
Les couples de points (A ; A'), (B ; B') et (C ; C') définissent un **vecteur** caractérisé par :
- une direction : celle de la droite (AA'),
- un sens : de A vers A',
- une longueur : la longueur AA'.

On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.
On dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un **représentant** de $\vec{u}$.
$\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des représentants de $\vec{u}$.

Remarque : La longueur d'un vecteur est aussi appelée la **norme** du vecteur.



Exercice 1
1) Tracer au crayon gris les demi droites parallèles à (AB) partant de tous les points de la figure sauf A, B et H.
2) A l'aide de votre compas reporter la distance AB, sur les demi-droites, à partir du point dont elles sont issues.
3) Nommer les points obtenus en suivant le modèle suivant « sur la demi droite partant de O on aura le point O' »
4) Complétez la figure pour avoir les images du triangle CED, du cercle de centre O et de rayon OH, et du segment [FG].
5) Conjecturez la nature de FGG'F' : Le quadrilatère FGG'F' semble être ……
6) Prouver votre conjecture :

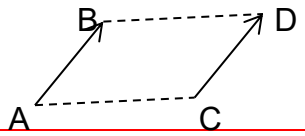
2. Égalité de vecteurs

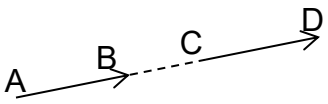
Définition :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exemple :
Ci-dessous, on peut tracer trois vecteurs égaux : $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

Propriété du parallélogramme :
Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.





Démonstration :

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point C en D. Les segments [AB] et [CD] ont donc même longueur et même direction.
  Le quadrilatère non croisé ABDC est donc un parallélogramme éventuellement aplati.
- Réciproquement : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, définis à l'aide des segments [AB] et [CD] d'un parallélogramme ABDC, sont égaux.

Exercice 2. Dans le plan, on considère six points A, B, C, D, E et F tels que ABCD et DEFC sont des parallélogrammes.

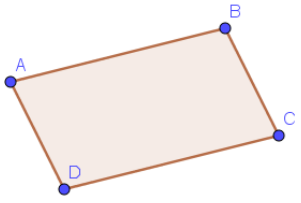
1. Faire une figure.

2. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

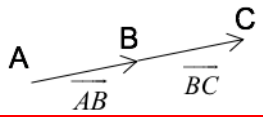
Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère ABFE?

3. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$?

Méthode 2 : Construire un point défini à partir de vecteurs
A partir du parallélogramme ABCD,
construire les points E, F, G et H tels que :
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$



Propriété du milieu :
Dire que B est le milieu du segment [AC] revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.



3. Vecteur nul

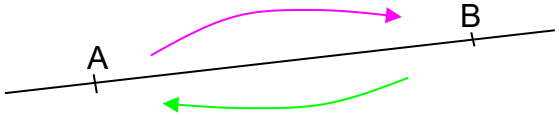
Définition :
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

On note : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Remarque : Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

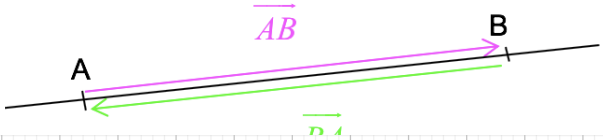
4. Vecteurs opposés

Il ne faut pas confondre sens et direction !
Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).
Cependant une direction possède deux sens, ici de « A vers B » ou de « B vers A ».



Définition :
Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur et qu'ils sont de sens contraire.

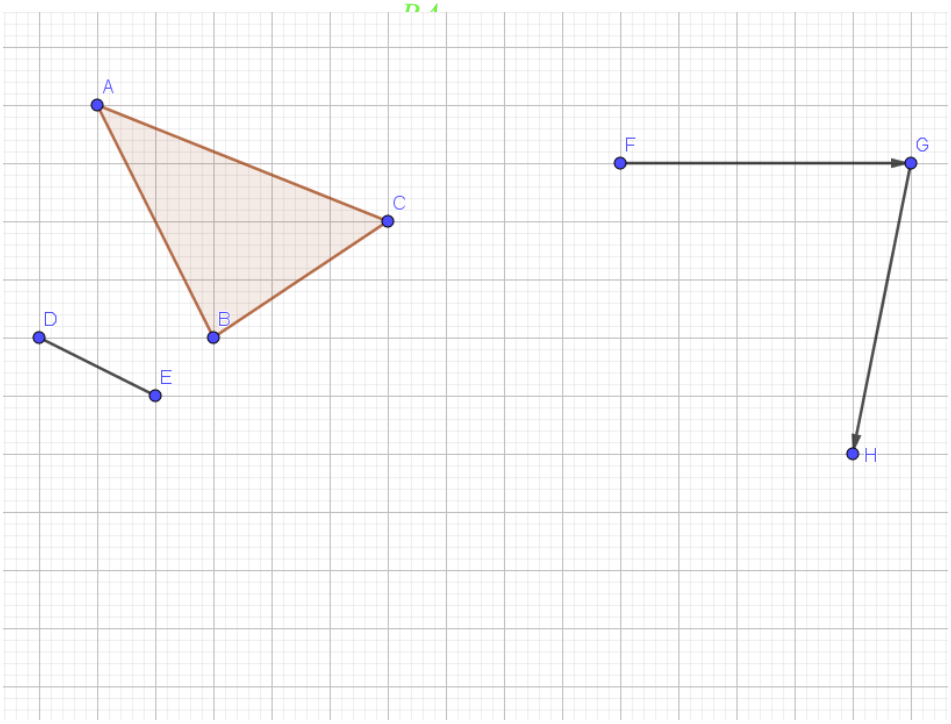
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



III. Somme de vecteurs

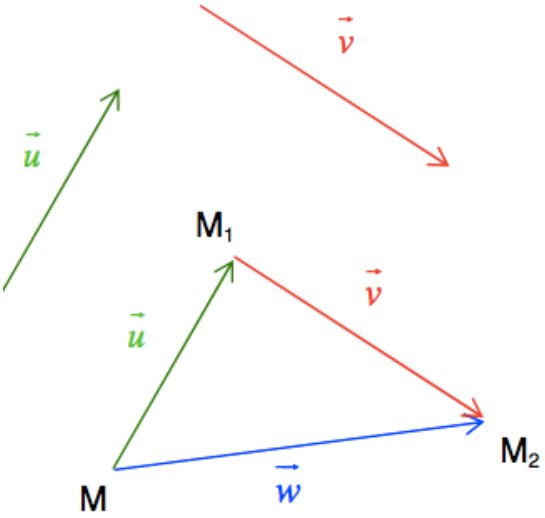
A moins que le contraire soit mentionné, les réponses doivent être justifiées.

1) Tracer au crayon gris A'B'C' et [D'E'] les images respectives de ABC et [DE] par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$ (notée $t_{\overrightarrow{FG}}$).
2) Tracer au crayon gris A''B''C'' et [D''E''] les images respectives de A'B'C' et [D'E'] par la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$
3) Quelle est la nature de DEE'D' ?
4) Quelle est la nature de D'E'E''D'' ?
5) En déduire la nature de DEE''D''.



6) Donner, sans justifier, deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{DD''}$ puis tracez les en rouge.
7) Quelle transformation utiliser pour passer directement de ABC à A''B''C'' ?
8) Sachant qu'on appelle la transformation précédente $t_{\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}}$ en déduire une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{FH}$.

1. Définition



Exemple :

Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$
et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 :

$$M \xmapsto{t_1} M_1 \xmapsto{t_2} M_2$$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$:

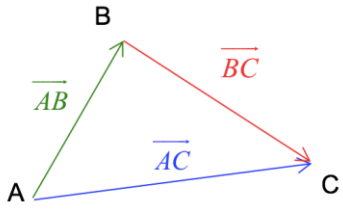
$$M \xmapsto{t} M_2$$

Propriété :
La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Une relation fondamentale

La relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Remarque :
Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Méthode 3 : Appliquer la relation de Chasles (non exigible)

Simplifier les écritures :

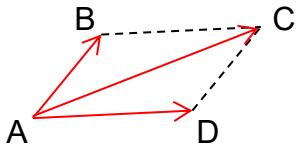
a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

Exercice 3.
Ecrire plus simplement les sommes de vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ | $\vec{v} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{JK}$ | $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ | $\vec{x} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DG}$

3. Conséquence :

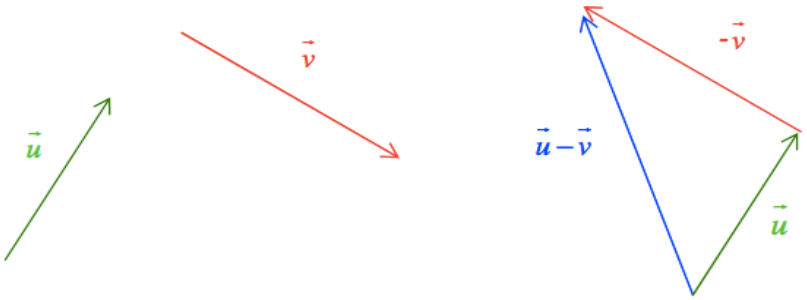
Propriété caractéristique du parallélogramme :
Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,



Démonstration :
D'après la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ peut s'écrire :
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ Soit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, soit encore : ABCD est un parallélogramme.

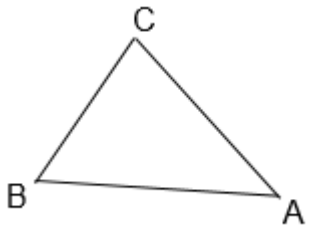
4. Différence de deux vecteurs

Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$, tel que :
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Méthode 4 : Construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs

Soit un triangle ABC.Construire le point *F* tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



On construit à partir de *A* (origine de $\overrightarrow{AF}$) le vecteur $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ en mettant « bout à bout » les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On a ainsi construit un vecteur $\overrightarrow{AF}$ et donc le point *F*.

Exercice 4.

a) Ecrire plus simplement les sommes de vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles. On remplacera les soustractions par l'addition de l'opposé

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ | $\vec{v} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{RS}$ | $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$ | $\vec{x} = 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MQ}$

b) Compléter les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \ldots \overrightarrow{B}$	**2.** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IL} + \ldots\ldots$	**3.** $\overrightarrow{RT} = \ldots\ldots + \overrightarrow{AT}$
4. $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{TD} + \ldots\ldots$	**5.** $\overrightarrow{RE} = \ldots\ldots + \overrightarrow{RS}$	**6.** $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C} \ldots + \overrightarrow{KL} + \ldots \overrightarrow{D}$
7. $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{C} \ldots + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{G} \ldots$	**8.** $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{BS} + \ldots\ldots$	**9.** $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots + \overrightarrow{JK} + \ldots\ldots$

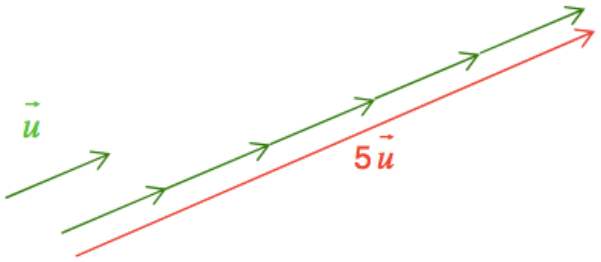
IV. Produit d'un vecteur par un réel

Exemple :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur :

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$



Remarques :

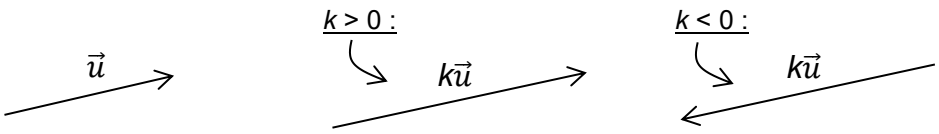
- Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens.
- La norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition :

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et k un nombre réel non nul.

On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, le vecteur noté $k\vec{u}$:

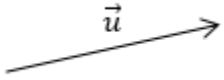
- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0,
- de norme égale à : k fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0,
  –k fois norme de $\vec{u}$ si k < 0.



Remarque :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Exemples : dessiner les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ valant respectivement $1{,}5\vec{u}$ et $-3\vec{u}$



Les vecteurs $\vec{u}$, $1{,}5\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ ont la même direction.

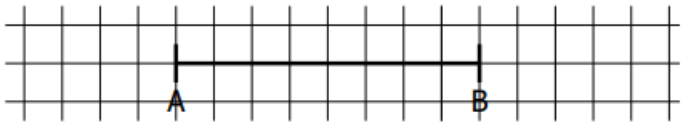
$\vec{u}$ et $1{,}5\vec{u}$ sont de même sens.

$\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.
La norme du vecteur *1,5* $\vec{u}$ est égale à 1,5 fois la norme de $\vec{u}$.
La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme de $\vec{u}$.

Exercice 5.

A et B sont deux points distincts.

a. Placer le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



b. Compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots \overrightarrow{BM}$ $\quad$ $\overrightarrow{BM} = \ldots\ldots \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{MB} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{BM}$ $\quad$ $\overrightarrow{AM} = \ldots\ldots \overrightarrow{BM}$

Exercice 6.

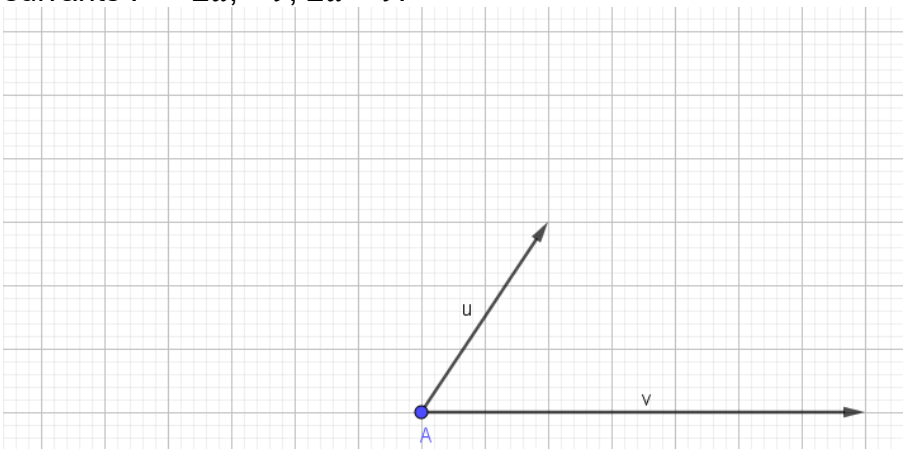
Soit A et B deux points du plan tels que la longueur AB mesure 5 cm.
Faire une figure et placer les points C, D, E et F tels que :

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$ $\quad$ $\overrightarrow{AE} = -0{,}6\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{FB}$

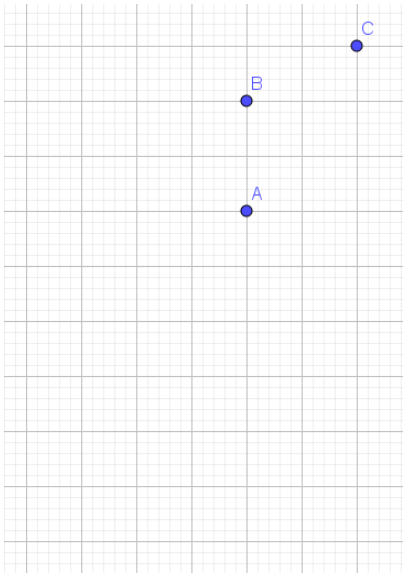
1. Construction

Méthode 5 : Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs

1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Représenter les représentants d'origine A des vecteurs suivants : $2\vec{u}$, $-\vec{v}$, $2\vec{u} - \vec{v}$.

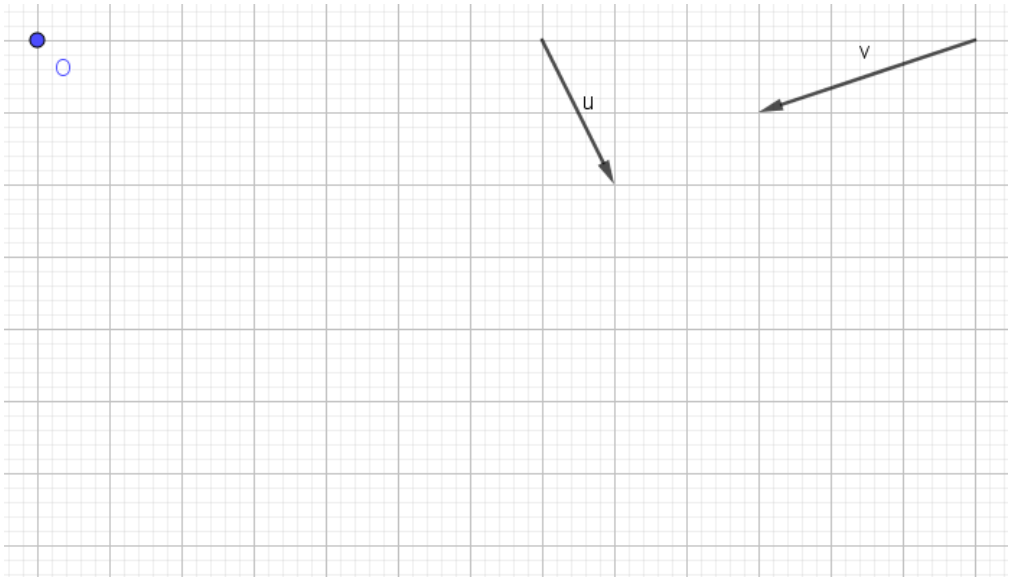


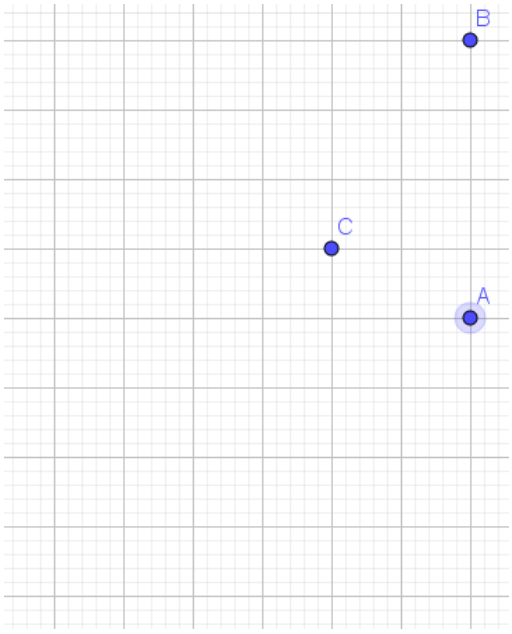
2) Soit trois points A, B et C '(figure à droite).
Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.



Méthode 6 : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle

1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O du plan.
Construire le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

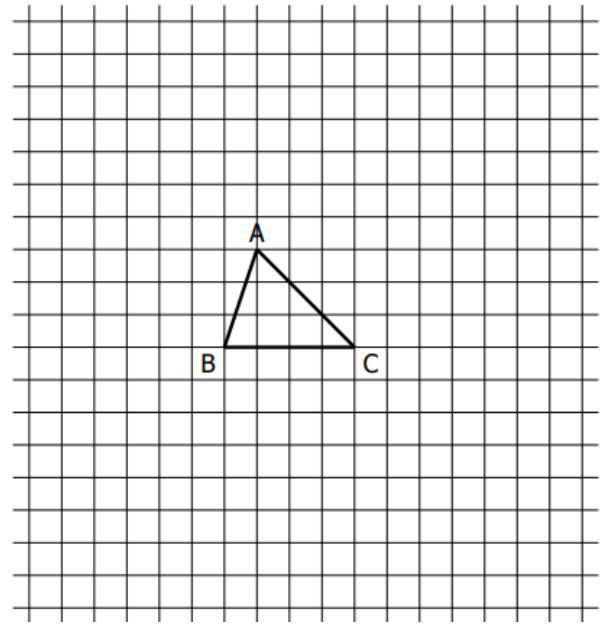




2) Soit trois points A, B, C du plan. Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

Exercice 7.

On donne le triangle ABC suivant :



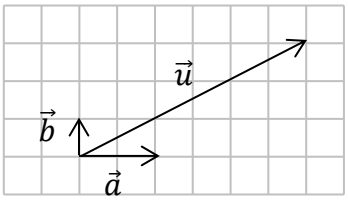
a. Construire : les points M, N, P, Q et R définis par :

- Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$
- Le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
- Le point P tel que $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- Le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
- Le point R tel que $\overrightarrow{AR} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

b. Montrer que $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{BA}$

Méthode 7 : Exprimer par lecture graphique un vecteur en fonction d'autres vecteurs

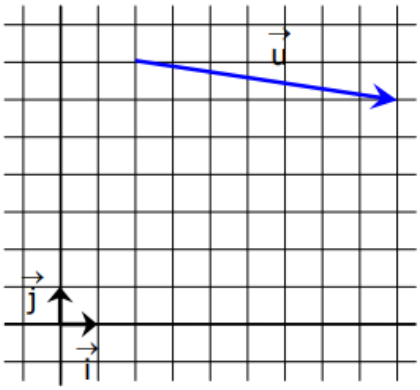
Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



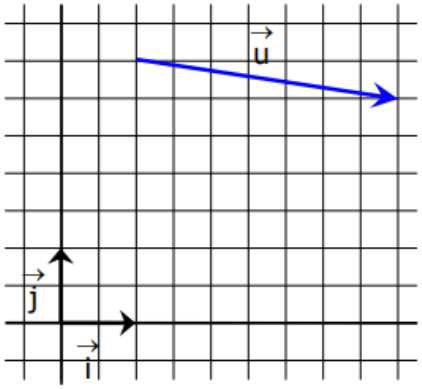
Exercice 8.

a. Trouver x et y tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

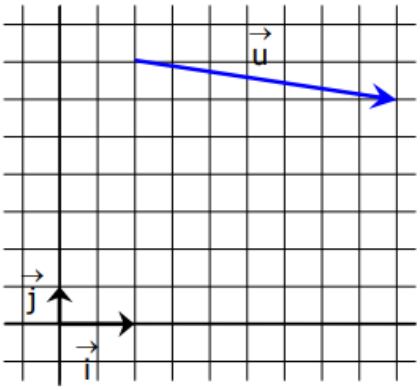
b. Tracer un vecteur $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$



$\vec{u}$ = ...



$\vec{u}$ = ...

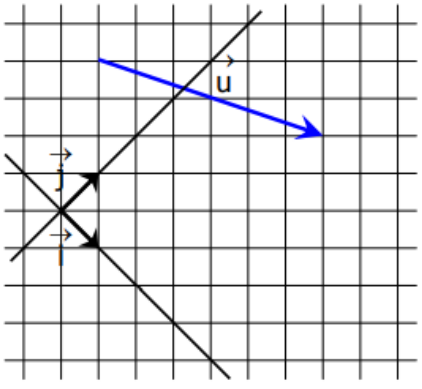


$\vec{u}$ = ...

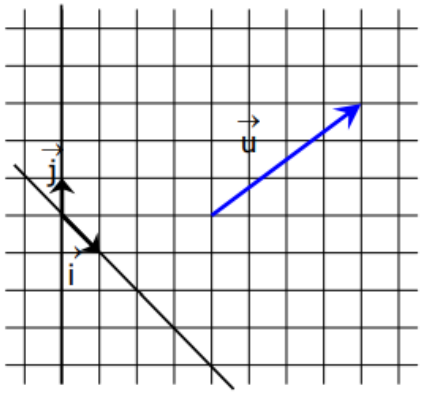
Exercice 9.

a. Trouver x et y tels que $\vec{u}' = x\vec{i}' + y\vec{j}'$

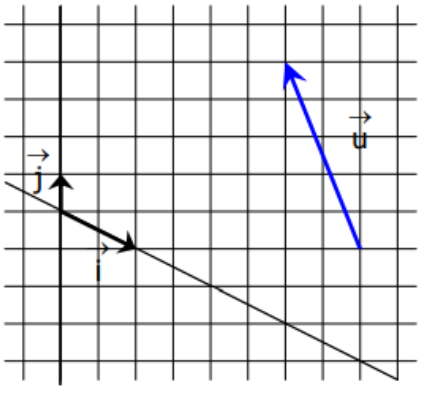
b. Tracer un vecteur $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$



$\vec{u}$ = ...



$\vec{u}$ = ...



$\vec{u}$ = ...

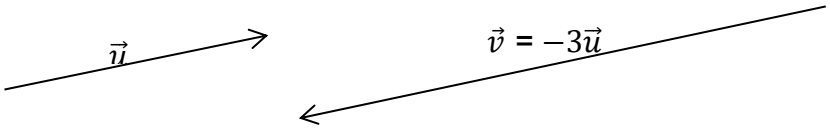
V. Notion de colinéarité

1. Définition

Définition :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel *k* tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Exemple :
$\vec{v} = -3\vec{u}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



Méthode 8 : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires
On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Applications

Propriétés :
1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 10. Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
1. Démontrer que $3\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. En déduire que B, C et D sont alignés.

Exercice 11. Soit ABC un triangle du plan. On définit les points D et E par :

$$\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

1. Sur une figure, tracer ABC de façon quelconque puis construire D et E. (On pourra s'aider du quadrillage.)
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
3. En déduire que ABED est un parallélogramme.

Exercice 12. Soit ABC un triangle. On considère les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1. Sur une figure, tracer ABC de façon quelconque puis construire D et E. (On pourra s'aider du quadrillage.)

2. Montrer que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

3. En déduire, en utilisant la relation de Chasles, que $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

4. Que peut-on en déduire concernant les points C, D et E?

Exercice 13. Soit A, B et C trois points du plan. On considère le point D tel que :

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

.

1. Faire une figure.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3. Que peut-on en déduire concernant les droites (AB) et (CD) ?

3. Transformations et vecteurs

Propriétés :

1) Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

2) Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.