Fiche d'entrainement vecteurs 2

Exercice 1

Soit ABCD un parallélogramme.

1) On considère les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Faire une figure

2) Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
4) Montrer que les points C, M et N sont alignés.

Exercice 2

On considère un triangle ABC et les poins D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Que peut-on en conclure sur les points A, E et C?

Exercice 3

On considère un triangle ABC et les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

Montrer que $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, puis que $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$.

Que peut-on en conclure?

Exercice 4

On considère un triangle ABC et les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.$$

Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Que peut-on en déduire sur les droites (EF) et (BC)?

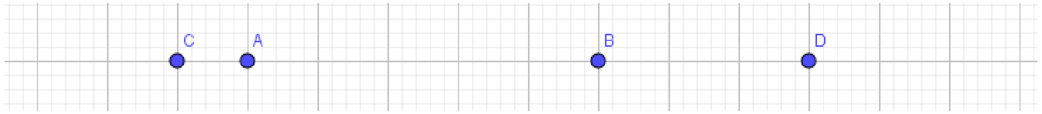
Exercice 5

On considère un triangle ABC et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}.$$

Montrer que les points A, D et E sont alignés.

Exercice 6



Compléter sans justifier $\overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB} = \ldots\overrightarrow{BD}$

Placer les points E et F vérifiant $\overrightarrow{BE} = \frac{-1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FB} = \frac{6}{9}\overrightarrow{DC}$

Correction

Exercice 1

1)

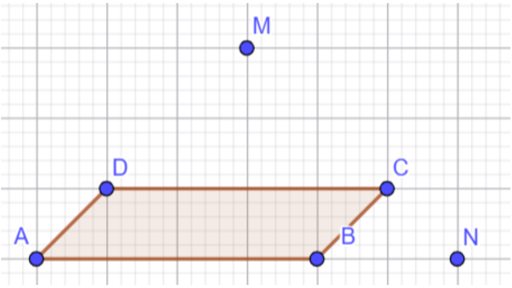
2) Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ça veut dire arriver à obtenir une égalité de la forme : $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$

On doit donc casser le vecteur $\overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire écrire une égalité de la forme $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots M}$ la question c'est : où casser le vecteur $\overrightarrow{CM}$?

Quand on regarde l'énoncé on voit que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$ ce qui est super intéressant car $\overrightarrow{AD}$ est un des vecteurs qu'on cherche à avoir.

Utiliser A semble adapté !

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$
$= -\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$
$= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 3\overrightarrow{AD}$
$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AD}$
$= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$



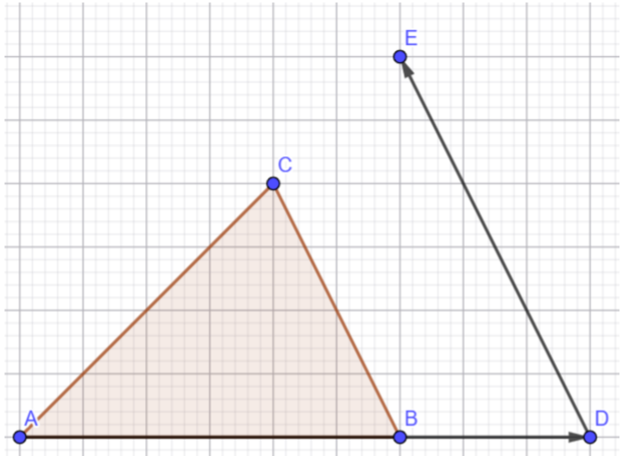
3) $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

4) On remarque que les coefficients des deux décompositions sont proportionnels

$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$

Ainsi $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires, donc A, C et M alignés.

Exercice 2



2)

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots E}$

Où casser le vecteur $\overrightarrow{AE}$?

Regardons les égalités proposées par l'énoncé

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Ça donne envie de couper avec D car ça fait apparaitre du $\overrightarrow{AD}$

On a aussi : $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

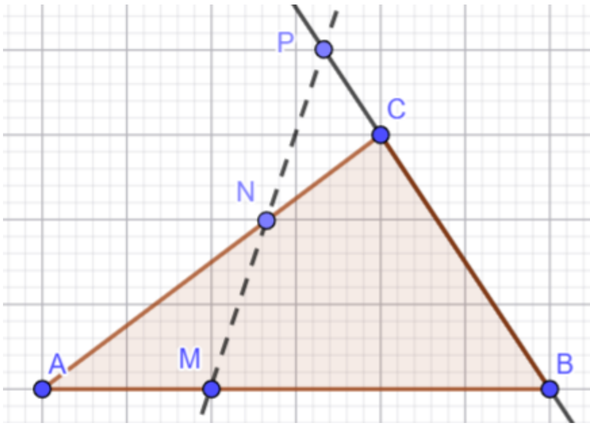
Ça donne aussi envie de couper en D car ça fait apparaitre du $\overrightarrow{DE}$ ainsi :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3) comme $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ on peut dire que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et (comme ils ont la lettre A en commun) on en déduit que A, E et C sont alignés.

Exercice 3

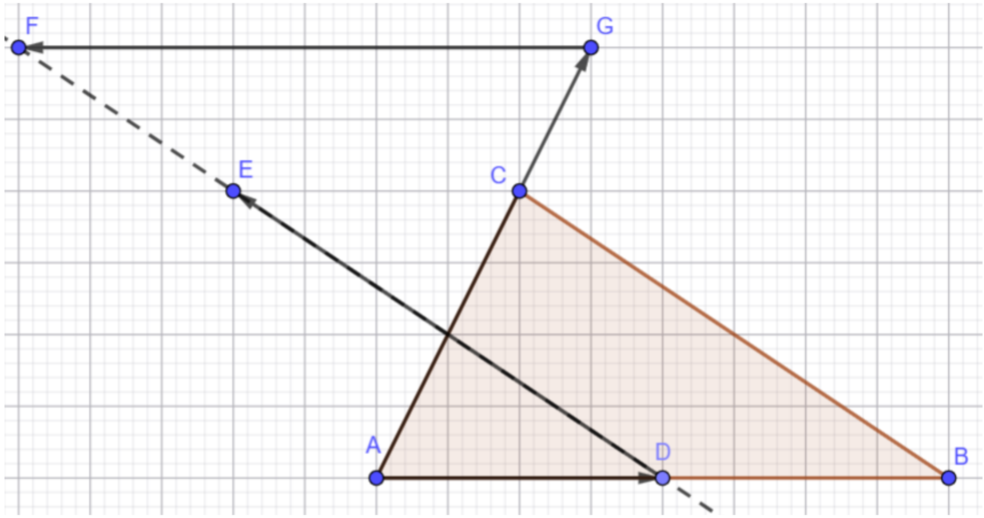
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\\ &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}\\ &= -\overrightarrow{CN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Le point N est donc le milieu du segment $[MP]$.

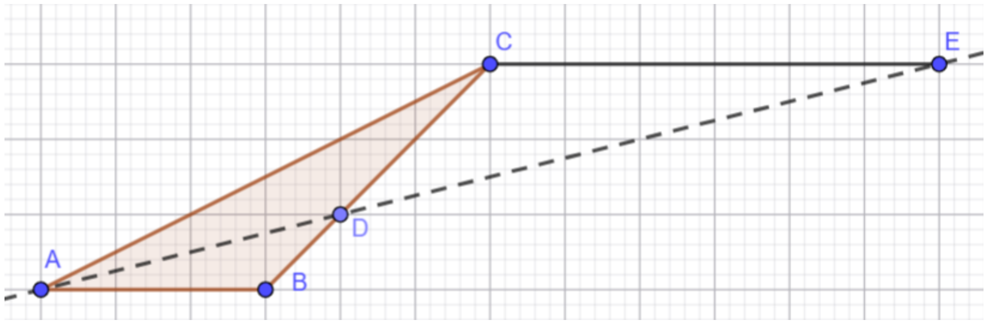
Exercice 4



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\
&= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires. Les droites (EF) et (BC) sont par conséquent parallèles.

Exercice 5

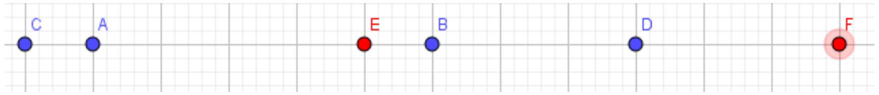


Pour montrer que 3 points sont alignés, généralement on cherche à prouver que deux vecteurs formés avec ces trois points sont colinéaires, autrement dit que l'un est égal à l'autre multiplié par un nombre.
A partir de A, D et E quels vecteurs choisir ? À priori tous font l'affaire mais certains sont plus faciles à gérer que d'autre
La figure de base est ABC, donc on va s'intéresser à des vecteurs partant de A.
Exprimons $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et pour ça on va commencer à casser $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

Exercice 6



Compléter sans justifier $\overrightarrow{AC} = \frac{-1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB} = \frac{6}{3}\overrightarrow{BD}$

Placer les points E et F vérifiant $\overrightarrow{BE} = \frac{-1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FB} = \frac{6}{9}\overrightarrow{DC}$