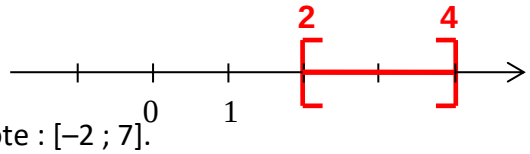
INTERVALLES ET INEQUATIONS

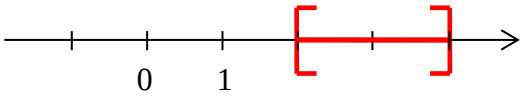
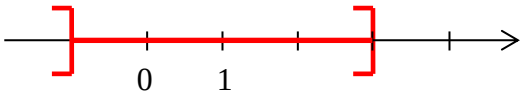
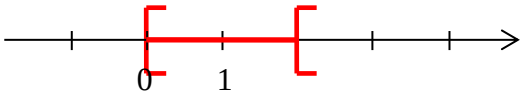
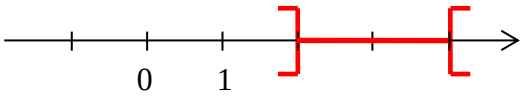
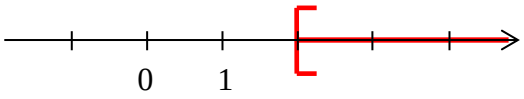
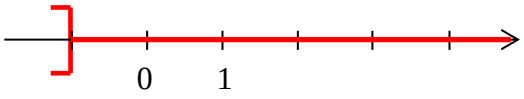
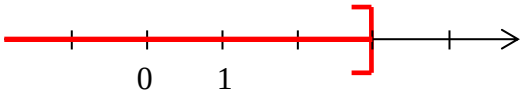
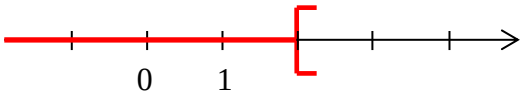
I. Intervalles de $\mathbb{R}$

1. Notations :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.
Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : [2 ; 4]



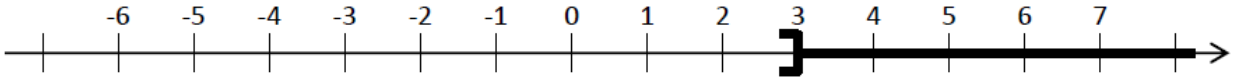
Exemple :
L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : [–2 ; 7].
On a par exemple : $4 \in [-2 ; 7]$ $-1 \in [-2 ; 7]$ $8 \notin [-2 ; 7]$

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	[2 ; 4]	
$-1 < x \leq 3$	]–1 ; 3]	
$0 \leq x < 2$	[0 ; 2[	
$2 < x < 4$	]2 ; 4[	
$x \geq 2$	[2 ; +∞[∞ désigne l'infini	
$x > -1$	]–1 ; +∞[	
$x \leq 3$	]–∞ ; 3]	
$x < 2$	]–∞ ; 2[	

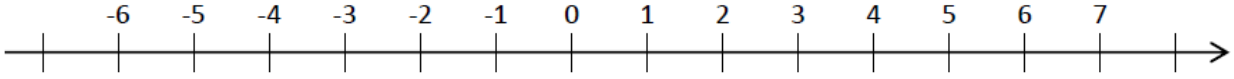
Remarque : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter]–∞ ; +∞[.

Exercice 1 Repasser en couleur la partie de l'axe décrite par chaque inéquation :

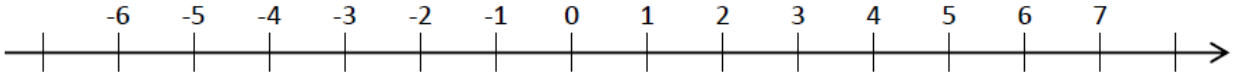
$x > 3$



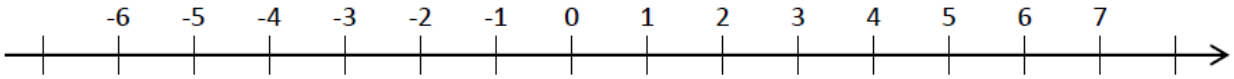
$x \geq -4$



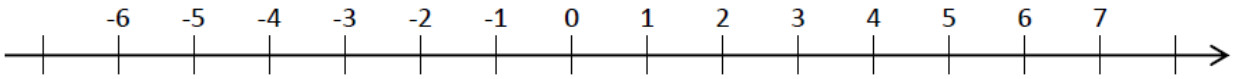
$x < 2{,}5$



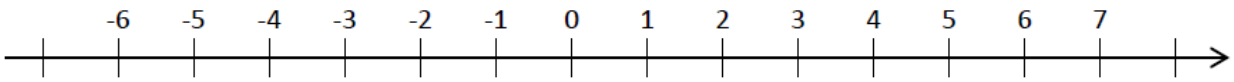
$x \geq -\frac{5}{2}$



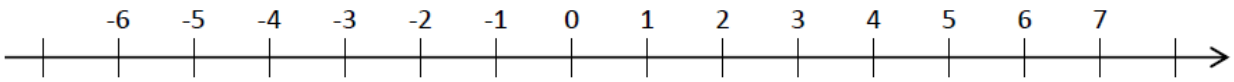
$x \leq -6$



$x \geq -\frac{7}{2}$



$x < -\frac{16}{5}$



2. Application aux inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x.

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs. Pour représenter l'ensemble des solutions, on utilise un intervalle. Les techniques de résolution des inéquations sont semblables à celles utilisées pour les équations.

Méthode 1 : Donner les solutions d'une inéquation

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x - 3 < 4$

Exercice 2

Résoudre chaque inéquation puis représenter sur l'axe la partie qui convient.

a. $50x + 300 > 1700$ **b.** $800x + 3000 \leq 14000$ **c.** $75x \leq 900 + 30x$ **d.** $9 - 3x > 4{,}5$

e. $34 - 2x \leq 25$ **f.** $5x - 3 > 7x - 95$ **g.** $3x \geq 24 - \frac{x}{2}$ **h.** $\frac{3x-2}{4} > 2$

3. Intervalle ouvert et intervalle fermé :

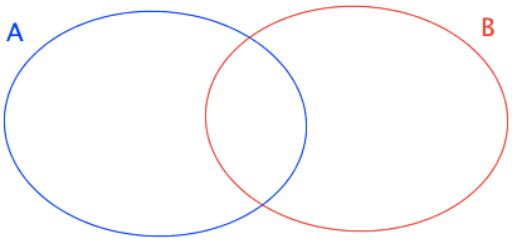
Définitions :
On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

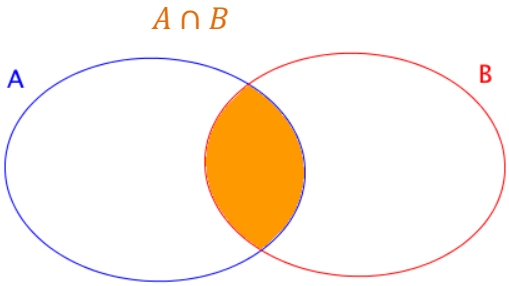
Exemples :

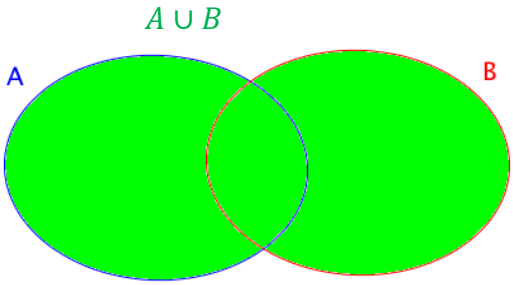
- L'intervalle [–2 ; 5] est un intervalle fermé. On a : $-2 \in [-2\ ;\ 5]$ et $5 \in [-2\ ;\ 5]$
- L'intervalle]2 ; 6[est un intervalle ouvert. On a : $2 \notin]2\ ;\ 6[$ et $6 \notin]2\ ;\ 6[$
- L'intervalle $]6\ ;\ +\infty[$ est également un intervalle ouvert.

4. Intersections et unions d'intervalles :

Définitions :
- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note A∩B.
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note A∪B.







Méthode 2 : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

1) I = [–1 ; 3] et J =]0 ; 4[2) I =] –∞ ; –1] et J = [1 ; 4]

II. Dresser un tableau de signes

1 - Premier degré : Tableau de signes de $ax + b$

Rappels

- Une fonction de la forme $x \longmapsto ax + b$ est une **fonction affine**.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.
- a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite
- La fonction est croissante si le coefficient directeur est positif et décroissante s'il est négatif.

Démarche

a. On recherche la valeur qui annule $ax+b$. Cette valeur est $-\frac{b}{a}$ mais en général, plutôt que d'apprendre par cœur ce résultat, il est plus simple de résoudre directement l'équation $ax+b=0$

b. On dresse le tableau de signes en inscrivant la solution trouvée sur la première ligne (correspondant à x) et en indiquant le 0 sur la seconde ligne (correspondant à $ax+b$)

c. On place les signes dans l'ordre suivant :

- Si le coefficient directeur a est positif : - 0 +
- Si le coefficient directeur a est négatif : + 0 -

Remarque : **On peut retenir l'ordre des signes grâce au raisonnement suivant :**

- si le coefficient directeur a est positif, la fonction est croissante donc d'abord négative puis positive.
- si le coefficient directeur a est négatif, la fonction est décroissante donc d'abord positive puis négative.

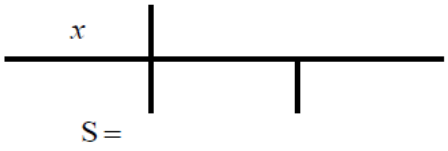
Méthode 3 : Dresser le tableau de signe de fonctions

1) Dresser le tableau de signes de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 4$

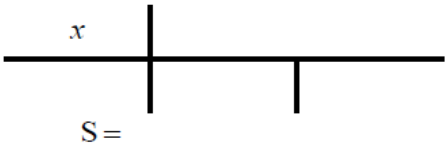
2) Dresser le tableau de signes de la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 - x$

EXERCICE 3 Résoudre chaque inéquation à l'aide d'un tableau de signe :

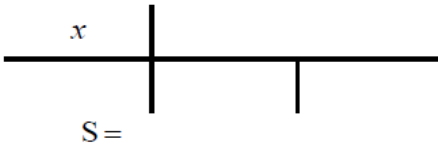
a. Résoudre : $2x+5>0$



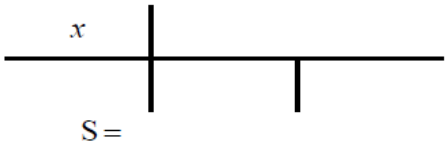
b. Résoudre : $4x-7<0$



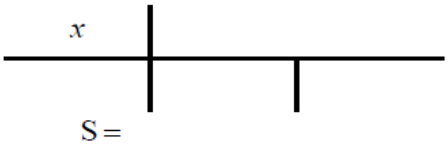
c. Résoudre : $-5x+8\leq 0$



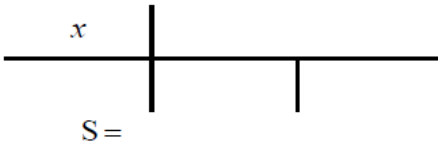
d. Résoudre : $-x-5\geq 0$



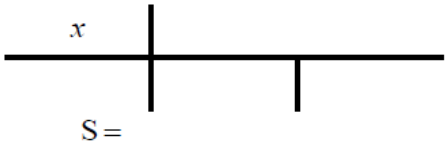
e. Résoudre : $7x-1<0$



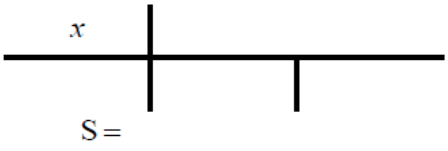
f. Résoudre : $5+3x>0$



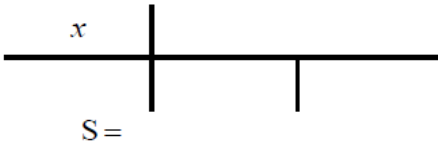
g. Résoudre : $-5+9x\geq 0$



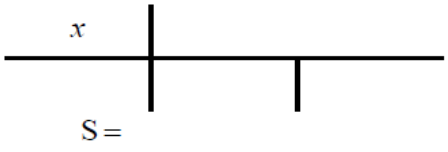
h. Résoudre : $-3-x\leq 0$



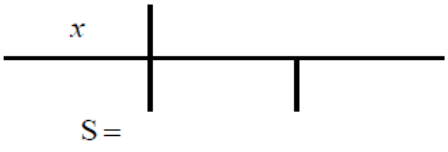
i. Résoudre : $8-2x<0$



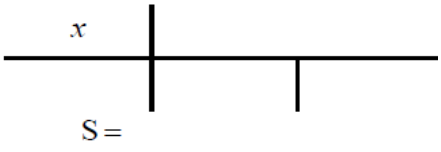
j. Résoudre : $x-\frac{2}{3}\leq 0$



k. Résoudre : $\frac{7}{2}x+1>0$



l. Résoudre : $\frac{3}{4}x-\frac{7}{5}\geq 0$



2 - Produit de facteurs du premier degré

Remarque

Lorsque l'on cherche à étudier le signe d'un produit de facteurs, on **évitera surtout de développer** l'expression.

Au contraire si l'on a affaire à une expression développée, on essaiera de la factoriser (en recherchant un facteur commun ou une identité remarquable...)

Démarche

a. On recherche les valeurs qui annulent chacun des facteurs

b. On dresse le tableau de signes en plaçant un facteur par ligne et en réservant une ligne pour le produit. Puis, on inscrit les valeurs trouvées précédemment et les 0 sur les lignes correspondantes

c. On place les signes comme indiqué dans le paragraphe précédent.

d. On complète enfin la dernière ligne (produit) en utilisant la règle des signes de la multiplication vue au collège.

Dès qu'un facteur est nul, le produit est nul ; par conséquent, on obtiendra 0 pour chaque « séparation verticale » de la dernière ligne du tableau.

Méthode 4 : Dresser le tableau de signe de fonctions *f*

Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3 + x)(-2x + 6)$

EXERCICE 4 Résoudre chaque inéquation à l'aide d'un tableau de signe :

a. Résoudre : $(2x+7)(3x-2)>0$

x			

S =

b. Résoudre : $(-5x+4)(7-3x)\leq 0$

x			

S =

c. Résoudre : $(7-3x)(x+9)\geq 0$

x			

S =

d. Résoudre : $(2x+3)(-3x+4)(5-4x)<0$

x				

S =

e. $(-x+5)(3x-1)(3+2x)(-7x-3)\leq 0$

x					

S =

Exercice 5 : Résoudre ces inéquations en procédant de la façon suivante :

1. Déterminer la (les) valeur(s) interdite(s)

2. Se ramener à une inéquation dont le second membre est nul.

3. Ecrire toutes les expressions avec le même dénominateur.

4. Etudier le signe de chaque facteur puis dresser un tableau de signe.

5. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (en prenant soin d'exclure les valeurs interdites).

a. $\frac{3}{x+1}>\frac{2}{x-1}$ b. $\frac{2}{3x+1}\leq 5$ c. $\frac{3x+1}{6-5x}\geq 2$ d. $\frac{3x+1}{5-2x}\leq -3$

Exercice 6 :

Un commerçant dépense 75 € pour fabriquer 150 glaces. Le prix d'une glace est de 2,50 €.
Combien doit-il faire de glace pour réaliser un bénéfice supérieur à 76 €.

Exercice 7 :

Eric vient de faire le plein de sa voiture. Le réservoir de sa voiture contient 54 ℓ de carburant et sa consommation est de 7 ℓ pour 100 km. Quand Éric doit-il faire de nouveau le plein de sa voiture s'il ne veut pas être sur la réserve de 5 ℓ du réservoir ?

Exercice 8 : Un camion pesant à vide 2 tonnes doit passer un pont limité à 6 tonnes. Combien de caisses de 118 kg peut-il transporter ?

Exercice 9 :

Vous avez 20 € pour prendre un taxi. La course coûte 5 € plus 2,50 € par kilomètre.
On désigne par m le nombre de kilomètres parcourus.
Écrire une inéquation permettant de calculer à combien de kilomètres le taxi pourra vous conduire avec 20€.

III. Valeur absolue d'un réel

1. Définition

Exemples :

- La valeur absolue de –5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition : La **valeur absolue** d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre –A si A est négatif.
La valeur absolue de A se note $|A|$.

Exemple : $|x-5| = \begin{cases} x-5, & si\ x \geq 5 \\ 5-x, & si\ x \leq 5 \end{cases}$

Propriétés : Soit x et y deux nombres réels.

1) $|x| \geq 0$ 2) $|-x| = |x|$ 3) $\sqrt{x^2} = |x|$ 4) $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$

5) $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$

6) $|xy| = |x| \times |y|$ 7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

Exemples :

1) $|-3| = 3$ et $|3| = 3$ donc $|-3| = |3|$ 2) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$ donc $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

Exercice 10

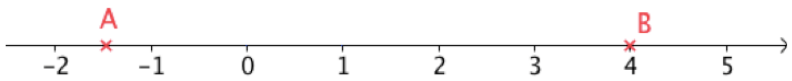
Compléter : la valeur absolue est la partie positive ou nulle de l'expression qu'elle contient :

$\|5\| =$	$\|0\| =$	$\|7\| =$	$\|-7\| =$ .....
$\|-1\| =$	$\|-1000000\| =$	$\|1-9\| =$	$\|12-7\| =$ .....
$\|9+5\| =$	$\|9\|+\|5\| =$	$\|-7\|+\|12\| =$	$\|-7+12\| =$ .....
$\|\pi-4\| =$	$\|\sqrt{2}-1\| =$	$\left\|10^{-9}\right| =$	$\left\|-10^{9}\right| =$ .....

2. Distance et valeur absolue

Propriété : Soit a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b est le nombre $|a-b|$.

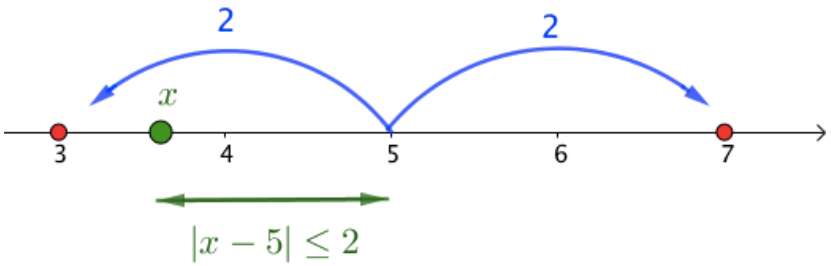
Exemple :
Calculer la distance entre les nombres –1,5 et 4.
d(–1,5 ; 4) = |4 – (–1,5)| = 5,5



Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$.
Dire que x est tel que $|x-a| \leq r$ signifie que x appartient à l'intervalle $[a-r\ ;a+r]$.

Exemple :

Soit un réel *x* tel que $|x-5| \leq 2$. Cela signifie que $x \in [5-2\,;5+2]$ soit $x \in [3\,;7]$.
Géométriquement, cela se traduit par le fait que la distance du point d'abscisse *x* au point d'abscisse 5 est inférieure ou égale à 2.



Exercice 11
En utilisant cette propriété, résoudre les équations suivantes comme dans l'exemple :
a) Exemple : $|x+3| = 8$ soit $x+3 = 8$ soit $x+3 = -8$ ⇔
⇔ soit $x = 8-3$ soit $x = -8-3$
⇔ Soit $x = 5$ soit $x = -11$ $\quad S = \{-11; 5\}$
b) $|x-5| = 3$ c) $|12-x| = 9$ d) $|2x-5| = 3$

Exercice 12
Donner l'intervalle qui correspond à chaque inégalité (on représentera cet intervalle sur l'axe gradué).

	INEGALITE		INTERVALLE	AXE GRADUE
a.	$\lvert x-7\rvert \leq 1$	⇔	$x \in$	
b.	$\lvert x-1\rvert < 7$	⇔	$x \in$	
c.	$\lvert x-3\rvert < 2$	⇔	$x \in$	
d.	$\lvert x-3\rvert \geq 2$	⇔	$x \in$	
e.	$\lvert x-4\rvert \leq 5$	⇔	$x \in$	
f.	$\lvert x-12\rvert > 7$	⇔	$x \in$	
g.	$\lvert x+2\rvert \leq 9$	⇔	$x \in$	
h.	$\lvert x+6\rvert > 5$	⇔	$x \in$	
i.	$\lvert x-8{,}3\rvert \leq 0{,}1$	⇔	$x \in$	
j.	$\lvert x-5\,000\rvert \geq 1\,000$	⇔	$x \in$	