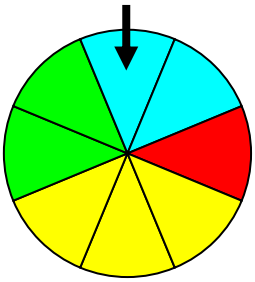
PROBABILITES

I. Expérience aléatoire

1) Exemples :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.



Définitions :
Une **expérience** *(lancé un dé par exemple)* est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** *(1 ou 3 par exemple)* et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.
L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'**univers** *(1, 2, 3, 4, 5 ou 6)*.

2) Réalisons une expérience aléatoire :

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

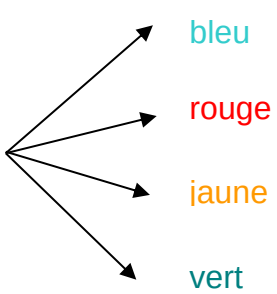
Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.
En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

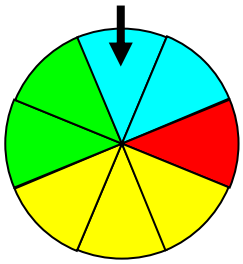
La suite de la leçon nous expliquera comment calculer les fréquences théoriques d'une expérience aléatoire.

II. Probabilité d'un événement

1) Arbre des possibles

Exemple :
Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des possibles :



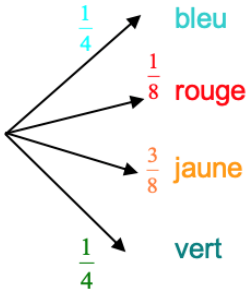


Définition :
L'**arbre des possibles** permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

2) Probabilité

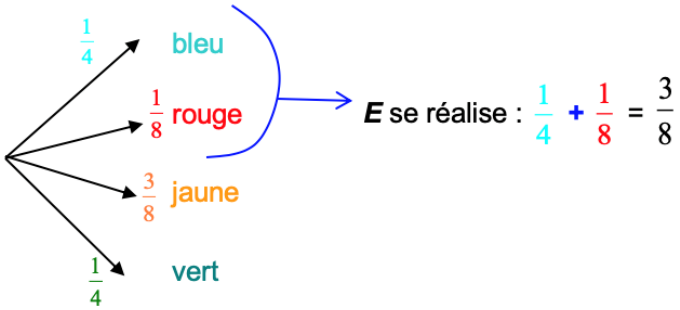
Définition :
Les fréquences obtenues d'un événement ***E*** se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (**Loi des grands nombres**). Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'événement ***E***.

Exemple :
2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue. Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.
On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.
On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



3) Événement

Exemple :
Soit l'événement ***E*** « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».
On pourrait se demander qu'elle est la probabilité que cet événement se réalise ?



On dit que la probabilité que l'événement ***E*** se réalise est égale à $\frac{3}{8}$ et on note : P(***E***) = $\frac{3}{8}$.

Définitions :
- Un **événement** est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Dans l'exemple, « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est un événement.
« La roue s'arrête sur un secteur bleu » est un événement élémentaire.

Méthode 1 : Dénombrer pour calculer une probabilité
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit ***E*** l'événement : « On tire un as ».
Quelle est la probabilité que l'événement ***E*** se réalise ?

Exercice 1

E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.
Quelle est la probabilité des événements suivants :

A = "il est un multiple de 2" *B* = "il est un multiple de 4"
C = "il est un multiple de 5" *D* = "il est un multiple de 2 mais pas de 4"

Exercice 2

On considère un jeu de 32 cartes.
Note : la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 "couleurs" : cœur ; carreau ; trèfle et pique.
On tire, au hasard, une carte du paquet. Chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :
V = "Obtenir un valet" *T* = "Obtenir un trèfle"
F = "Obtenir une figure" (les figures sont les valets, les dames et les rois)
Calculer les probabilités suivantes : i) $p(V)$ ii) $p(F)$ iii) $p(T)$

Propriétés :
1) La probabilité P(***E***) d'un événement ***E*** est telle : $0 \leq P(E) \leq 1$.
2) La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Définition : L'ensemble des probabilités de ces événements élémentaires constitue ce qu'on appelle la **loi de probabilité**.

4) Événement contraire

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit ***E*** l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».
Alors l'événement contraire de ***E*** est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet événement est noté $\overline{E}$.

Propriété :
La probabilité de l'événement contraire d'un événement ***E*** est : $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

5) Exemple d'une expérience aléatoire à deux épreuves

Méthode 2 : Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.
Soit ***E*** l'événement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »
Calculer P(***E***).

Exercice 3

1. Une urne *U* contient 3 boules blanches et une urne *V* contient deux boules blanches et une boule noire. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. L'urne *U* contient à présent une boule blanche et une boule noire, et l'urne *V* contient deux boules blanches et une boule noire.
On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

Exercice 4

Un sac contient quatre jetons rouges et deux jetons bleus.
On tire des jetons, sans remise, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés. Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.

Exercice 5

Une urne contient quatre jetons numérotés I, II, III et IV.On tire successivement deux jetons, avec remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux numéros consécutifs ?

Exercice 6

Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.
1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé. a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair
b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Exercice 7

Un sac contient 5 jetons : • un bleu valant 3 points • deux rouges valant chacun 2 points
• deux verts valant chacun 1 point.
1. On tire un jeton au hasard : a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 points ?
2. On tire un jeton, puis un deuxième sans remettre le premier dans le sac.
a) Faire un arbre (ou un tableau) indiquant tous les tirages possibles.
b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A = "Tirer deux jetons de couleurs différentes" *E* = "Obtenir exactement 4 points"
C = " Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes"
D = "Obtenir au moins 4 points"

Exercice 8

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants.
On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :
A = "ils auront trois filles" *B* = "ils auront trois enfants de même sexe"
C = "ils auront une fille ou plus" *D* = "les trois enfants ne seront pas tous du même sexe"

Exercice 9 On lance *n* dés ($n \geq 1$). On note *A* l'événement "obtenir au moins un 6".

1. Décrire $\bar{A}$
2. Exprimer en fonction de *n* la probabilité $p(\bar{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$
4. Donnez P(A) pour les n allant de 1 à 4

Exercice 10

Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète : 1. Un billet ? 2. Deux billets ?

III. Réunion et intersection de deux événements

1) Définitions

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet » B : « On tire un cœur ou un carreau »

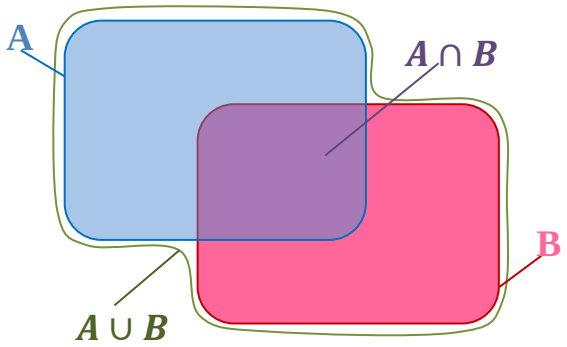
L'intersection des événements A et B est l'événement :
« On tire le valet de cœur ou le valet de carreau ».
On note cet événement A ∩ B et on lit « A inter B »

La réunion des événements A et B est l'événement :
« On tire le valet de piques, le valet de trèfle, un cœur ou un carreau ».
On note cet événement A ∪ B et on lit « A union B »

Définitions :

L'événement "A et B", noté A ∩ B, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.

L'événement "A ou B", noté A ∪ B, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



2) Probabilité d'une réunion

Théorème : Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Méthode 3 : Calcul de probabilité en utilisant la formule de probabilité d'une réunion

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
On considère les événements suivants :
A : « On obtient un nombre impair » B : « On obtient un multiple de 3 »
Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

Exercice 1 (reprise)

E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1) Quelle est la probabilité des événements suivants :

A = "il est un multiple de 2" *B* = "il est un multiple de 4"

C = "il est un multiple de 5" *D* = "il est un multiple de 2 mais pas de 4"

2) Calculer la probabilité de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$ et $A \cup C$

Exercice 2 (reprise)

On considère un jeu de 32 cartes.

Note : la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 "couleurs" : cœur ; carreau ; trèfle et pique.

On tire, au hasard, une carte du paquet. Chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

V = "Obtenir un valet" *T* = "Obtenir un trèfle"

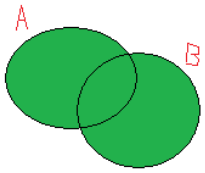
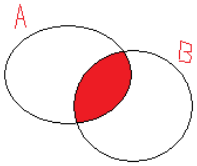
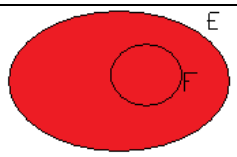
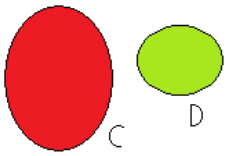
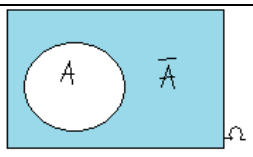
F = "Obtenir une figure" (les figures sont les valets, les dames et les rois)

a) Calculer les probabilités suivantes : i) $p(V)$ ii) $p(F)$ iii) $p(T)$

b) Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap T)$.

En déduire la probabilité $p(F \cup T)$ d'obtenir une figure **ou** un trèfle.

c) Décrire l'événement *F* et calculer (simplement !) sa probabilité $p(\overline{F})$

vocabulaire probabiliste	vocabulaire ensembliste		diagramme	exemple
A ou B	A union B	$A \cup B$		A={2 ;3} B={3 ;4} $A \cup B = \{2 ;3 ;4\}$
A et B	A inter B	$A \cap B$		A={2 ;3} B={3 ;4} $A \cap B = \{3\}$
	F inclus dans E	$F \subset E$		F = {1 ;3} E={1 ;2 ;3}
C et D incompatibles	C et D disjoints	$C \cap D = \{\emptyset\}$		C={4 ;5 ;6} D={1 ;2}
événement contraire de A	complémentaire de A dans Ω	$\Omega \backslash A = \bar{A}$		A={2 ;3} $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ $\bar{A} = \{1 ; 4 ; 5 ; 6\}$

3) Événements incompatibles

Définition :
On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété :
Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un roi »
Les deux événements A et B sont incompatibles, en effet $A \cap B = \emptyset$.
On en déduit que la probabilité de l'événement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Exercice 11
Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) = 0{,}2$ et $p(B) = 0{,}7$.
Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\bar{A})$ et $p(\bar{B})$.

4) Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau :

Vidéo https://youtu.be/aVXgUHx6ICA

Exercice 12
Dans un sac, il y a des grosses boules et des petites; ces boules sont blanches ou noires. On sait qu'il y a 5 grosses et 4 petites parmi lesquelles 6 sont blanches et 3 noires.
1. Sachant qu'il y a trois boules à la fois blanches et grosses, déterminer le nombre de boules " petites et noires ", " grosses et noires ", " petites et blanches ". (On pourra utiliser un tableau à double entrée).
2. On tire une boule au hasard, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée.
Quelles sont les probabilités pour qu'elle soit: blanche et petite ? blanche ? petite ? blanche ou petite ?

Exercice 13
Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes:
- le premier, des bulbes à fleurs rouges dont 90 % donnent une fleur,
- le second, des bulbes à fleurs jaunes dont 80 % donnent une fleur.

Un horticulteur achète 70 % des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second. Un bulbe donne au plus une fleur. L'horticulteur plante un bulbe au hasard. Quelle est la probabilité :
1. d'obtenir une fleur rouge ?
2. d'obtenir une fleur jaune ?
3. de ne pas obtenir de fleur ?

Exercice 14

Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.
Dans un lot de 1 000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (et peut-être aussi le défaut A) et 40 présentaient simultanément les défauts A et B.
Un client achète un des appareils produits. Calculer:
1. la probabilité pour qu'il ne présente aucun défaut.
2. la probabilité pour qu'il présente le défaut A seulement.
3. la probabilité pour qu'il présente le défaut B seulement.

exercice 15
Une enquête est faite auprès de la population étudiante d'un campus universitaire. On note F la population féminine, I l'ensemble des étudiants, garçons et filles, sachant jouer d'un instrument de musique.
L'enquête révèle que: F représente 48 % de la population étudiante; I représente 40 % de la population étudiante; chez les étudiants du groupe I, 45 % sont des filles.
On interroge un étudiant au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit :
1. un garçon ? 2. un étudiant du groupe I ? 3. une fille sachant jouer d'un instrument de musique ? 4. un garçon sachant jouer d'un instrument de musique ?

Exercice 16

Deux lignes téléphoniques *A* et *B* arrivent à un standard. On note :
$E1$ = "la ligne *A* est occupée" $E2$ = "la ligne *B* est occupée"
Après étude statistique, on admet les probabilités : $p(E1) = 0{,}5$; $p(E2) = 0{,}6$ et $p(E1 \cap E2) = 0{,}3$
Calculer la probabilité des événements suivants :
F = "la ligne *A* est libre" G = "une ligne au moins est occupée"
H = "une ligne au moins est libre" (On pourra s'aider d'un tableau à deux entrées)

Exercice 17

Un sondage réalisé un lundi après-midi à la sortie d'un supermarché auprès de 350 femmes, a donnée les résultats suivants :
- 86% d'entre elles sont des femmes au foyer, les autres sont salariées ;
- 66% d'entre elles ont dépensé entre 40 et 200 euros ;
- parmi les femmes salariés, les $\frac{4}{7}$ ont dépensé entre 40 et 200 euros, et deux ont dépensé plus de 200 euros ;
- aucune femme au foyer n'a dépensé plus de 200 euros.

Compléter le tableau ci-dessus :
On choisit au hasard une de ces personnes interrogées. On considère les événements suivants : *A* : " elle est salariée " ; *B* : " elle a dépensé moins de 40 euros " ;
C : " elle est salariée et a dépensé moins de 200 euros ".
a) Calculer la probabilité des événements *A*, *B*, et *C*.
b) Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$: " elle ... " puis calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.
c) Quel est le pourcentage de femmes interrogées ayant dépensé moins de 40 euros ?