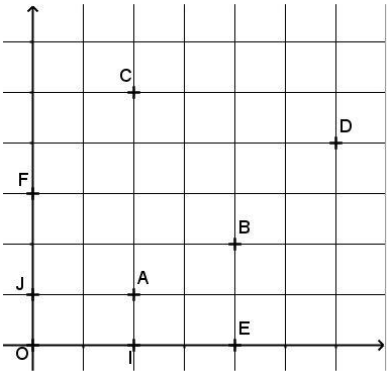
REPÉRAGE

Exercice 1

1. Lire dans le repère $(O;I;J)$ les coordonnées des points A,B,C,D,E et F :

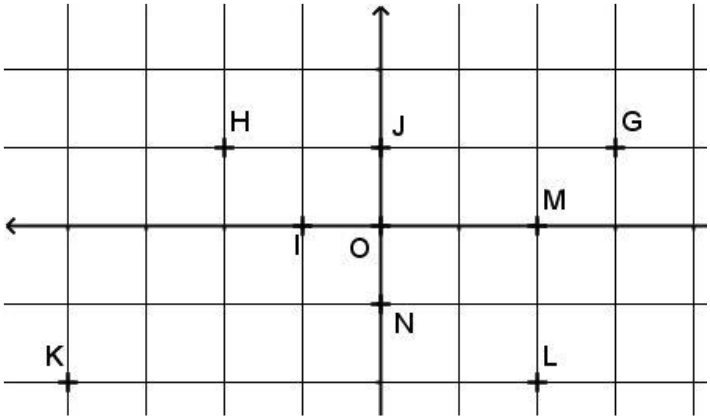


$A(1;1)$ $B(2;2)$

$C(1;5)$ $D(3;4)$

$E(2;0)$ $F(0;3)$

2. Lire dans le repère $(O;I;J)$ les coordonnées des points G,H,K,L,M et N :



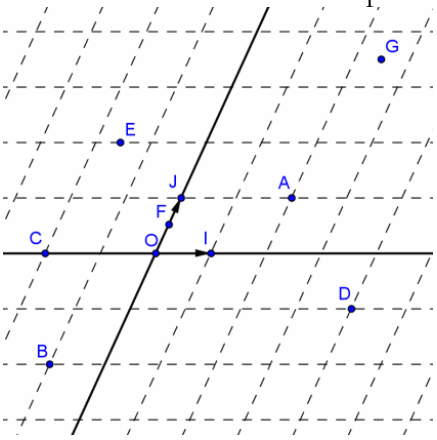
$G(-3;1)$ $H(2;1)$

$K(4;-2)$ $L(-2;-2)$

$M(2;0)$ $N(0;-1)$

Exercice 2 :

Donner les coordonnées des points placés dans le repère $(O;I;J)$de la figure ci-dessous :



$A(2;1)$ $B(-1;-2)$

$C(-2;0)$ $D(4;-1)$

$E(-1{,}5;2)$ $F(0;0{,}5)$

$G(2{,}5;3{,}5)$

Exercice 3

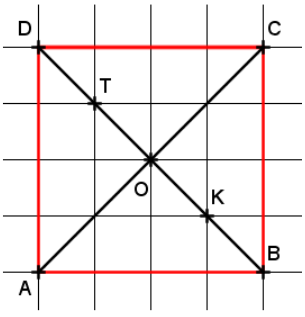
$ABCD$ est un carré de centre O.

Lire, dans le repère (A,B,D), les coordonnées de :

a. A,B,D et O b. K milieu de $[OB]$ c. T milieu de $[OD]$

a. $A(0;0)$,$B(1;0)$,$D(0;1)$ et $O(0{,}5;0{,}5)$

b. $K\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$ milieu de $[OB]$ c. $T\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ milieu de $[OD]$



Exercice 4

1) Réciter le théorème de Pythagore et sa réciproque.

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle le carré de la mesure de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit

Réciproque du Théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré de la mesure du plus grand côté est égale à la somme des carrés des mesures des deux autres alors ce triangle est rectangle.

2) Inventer un exercice obligeant celui qui doit le résoudre à utiliser le théorème de Pythagore.

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que AB = 7cm et AC = 11cm. Déterminer BC.

3) Effectuer l'exercice.

ABC est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore on aura : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 11^2 - 7^2 = 121 - 49 = 72$ et donc $BC = \sqrt{72}$

4) Inventer un exercice où l'on cherche à déterminer si deux triangles sont rectangles (choisissez les mesures pour qu'un le soit et que l'autre non)

a) Soit IJK un triangle tel que IJ=6cm , JK = 8cm et KI=10cm. Dire si IJK est rectangle.

b) Soit RST un triangle tel que RS = 13 , ST = 10cm et TR=15cm. Dire si RST est rectangle.

5) Résoudre cet exercice

a) Dans IJK, $KI^2 = 10^2 = 100$ et $IJ^2 + JK^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Ainsi $KI^2 = IJ^2 + JK^2$ et donc d'après la réciproque du Théorème de Pythagore IJK est rectangle en J.

b) Dans RST, $RT^2 = 15^2 = 225$ et $RS^2 + ST^2 = 13^2 + 10^2 = 169 + 100 = 269$

Ainsi $RT^2 \neq RS^2 + ST^2$ et donc d'après le théorème de Pythagore RST n'est pas rectangle.

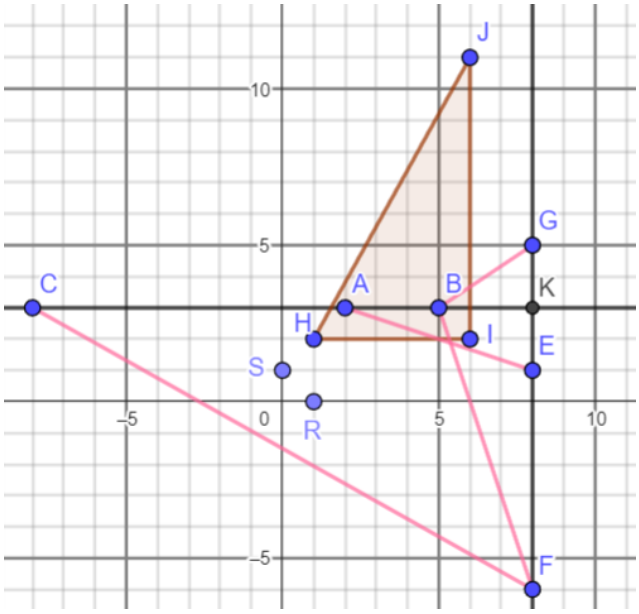
Exercice 5

On se place dans le repère orthonormé (O,R,S)

Soit A, B, C, E, F et G six points vérifiant : $A(2;3)$, $B(5;3)$, $C(-8;3)$, $E(8;1)$, $F(8;-6)$ et $G(8;5)$

1) Déterminer les longueurs AB, AC, BC, EF, FG et EG.
2) En déduire une méthode à exprimer en français permettant de déterminer la distance entre deux points du plan. (Évoquer la condition spécifique nécessaire avant de vous lancer dans la démarche)
3) Soit $H(1;2)$, $I(6;2)$ et $J(6;11)$
   a. Peut-on utiliser la méthode de la question précédente pour déterminer HJ ?
   b. Utiliser cette méthode pour déterminer HI et IJ.
   c. Tracer le triangle HIJ, et en déduire la longueur HJ.
4) En vous inspirant de ce qui a précédé déterminer les longueurs AE, BG, BF et CF.
5) En déduire une méthode pour déterminer la distance entre deux points dont on connait les coordonnées.

1)



$AB = 3$ $AC = 10$ $BC = 13$

$EF = 7$ $FG = 11$ $EG = 4$

2)

Si deux points ont une coordonnée commune alors leur distance est la différence entre les deux autres coordonnées (la grande moins la petite)

3)

a) Non car ces deux points n'ont pas de coordonnée commune.

b) HI=6-1=5 et IJ=11-2=9

c) dans HIJ rectangle en I, le théorème de Pythagore nous donne : $HJ^2 = HI^2 + IJ^2$

$= 5^2 + 9^2 = 25 + 81 = 106$

Ainsi $HJ = \sqrt{106}$

4)

Je place K(8 ;3) le point d'intersection des droites (CB) et (FG)

Toutes les recherches de longueurs vont me faire travailler dans des triangles rectangles en K.

Pour déterminer AE , je me place dans AKE rectangle en K, d'après le théorème de Pythagore on aura : $AE^2 = AK^2 + KE^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$ et donc $AE = \sqrt{40}$
De la même manière :
$BG = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $BF = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$ et $CF = \sqrt{16^2 + 9^2} = \sqrt{256 + 81} = \sqrt{336}$
5) la distance entre deux points du plan et la racine carrée de la somme des carrés des différences des coordonnées respectives des deux points.

Exercice 6
Calculer AB avec :
a. $A(-4;-3)$ et $B(8;2)$
Dans $(O;I;J)$ un repère orthonormé.

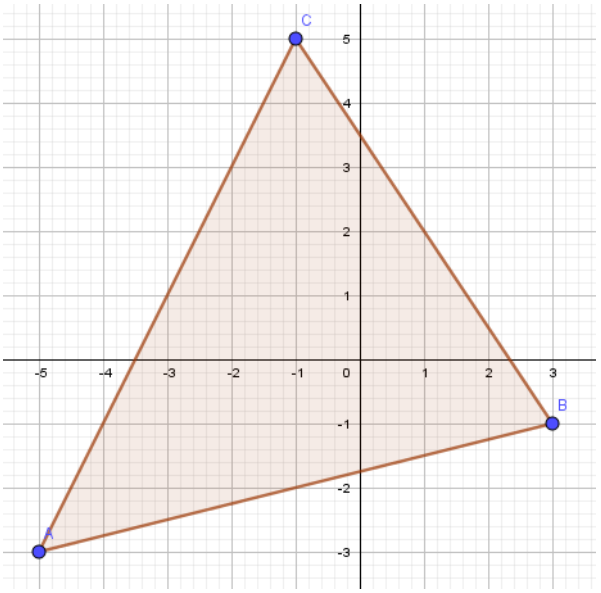
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(8 - (-4)\right)^2 + \left(2 - (-3)\right)^2}$$
$$= \sqrt{(+12)^2 + (+5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

b. $A(2;-1)$ et $B(-2;1)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + \left(1 - (-1)\right)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (+2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

c. $A(1{,}4;0)$ et $B(3;1{,}2)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 1{,}4)^2 + (1{,}2 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(1{,}6)^2 + (+1{,}2)^2} = \sqrt{2{,}56 + 1{,}44} = \sqrt{4} = 2$$



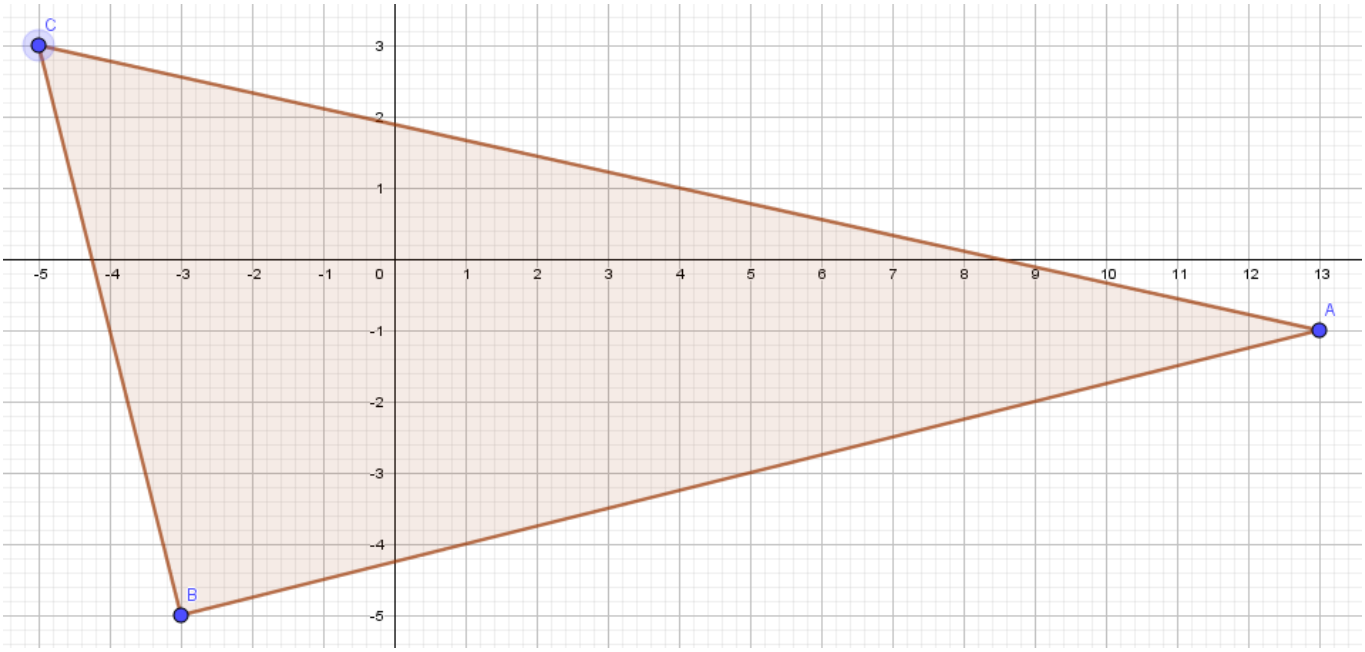
Exercice 7
Etudier la nature des triangles ABC avec :
a. $A(-5;-3)$,$B(3;-1)$ et $C(-1;5)$
b. $A(13;-1)$,$B(-3;-5)$ et $C(-5;3)$

1) Dans $(O;I;J)$ un repère orthonormé.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$$
$$\sqrt{\left(3 - (-5)\right)^2 + \left(-1 - (-3)\right)^2} = \sqrt{(+8)^2 + (+2)^2} = \sqrt{68}$$
$$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} =$$
$$\sqrt{\left(3 - (-1)\right)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{(+4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{\left(-1 - (-5)\right)^2 + \left(5 - (-3)\right)^2} = \sqrt{(+4)^2 + (+8)^2} = \sqrt{80}$$

Il n'y a pas deux côtés de même mesure donc le triangle est ni isocèle ni équilatéral.
Le plus grand côté est [CA] or $CA^2 = 80$ et $BA^2 + BC^2 = 68 + 52 = 120$
donc $CA^2 \neq BA^2 + BC^2$ et donc d'après **la contraposée du théorème de Pythagore** le triangle n'est pas rectangle

2)



$$BA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3-13)^2 + \big(-5-(-1)\big)^2} = \sqrt{(-16)^2 + (-4)^2} = \sqrt{272}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{\big(-3-(-5)\big)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{(+2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{68}$$

$$CA = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-5-13)^2 + \big(3-(-1)\big)^2} = \sqrt{(-18)^2 + (+4)^2} = \sqrt{340}$$

AC est le plus grand des trois côtés or
$AC^2 = 340$ et $BA^2 + BC^2 = 272 + 68 = 340$ donc $AC^2 = BA^2 + BC^2$ et donc la réciproque du théorème de pythagore on a ABC rectangle en B.

Exercice 8

Soit $\Omega(3;2)$, $A(6{,}5;10)$ et $B(-4{,}5;-2{,}5)$

Le point B appartient-il au cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω passant par A ?

La question posée revient à se demander si $\Omega A = \Omega B$

Il nous faut donc calculer les longueurs des deux segments $[\Omega A]$ et $[\Omega B]$.

$$\Omega A = \sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2} = \sqrt{(3-6{,}5)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{(-3{,}5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{76{,}25} \approx 8{,}73$$

$$\Omega B = \sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2} = \sqrt{\big(3-(-4{,}5)\big)^2 + \big(2-(-2{,}5)\big)^2} = \sqrt{7{,}5^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{76{,}5} \approx 8{,}75$$

Les deux longueurs sont très proches mais pas égales donc si on faisait la figure on aurait vraiment l'impression que les deux points A et B sont sur le cercle C mais ça n'est pas le cas.

Exercice 9

Calculer les coordonnées du milieu K de $[AB]$.

a. $A(2;4)$ et $B(0;2)$ b. $A(2;8)$ et $B(-4;6)$

c. $A(-2;1)$ et $B(3;-2)$ d. $A(-4;1)$ et $B(-2;-3)$

Calculer les coordonnées du milieu K de $[AB]$.

a. $A(2;4)$ et $B(0;2)$

K milieu de $[AB] \Leftrightarrow K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{4+(-2)}{2};\frac{1+3}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{2}{2};\frac{4}{2}\right) \Leftrightarrow K(1;2)$

b. $A(2;8)$ et $B(-4;6)$

K milieu de $[AB] \Leftrightarrow K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{2+(-4)}{2};\frac{8+6}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{-2}{2};\frac{14}{2}\right) \Leftrightarrow K(-1;7)$

c. $A(-2;1)$ et $B(3;-2)$

K milieu de $[AB] \Leftrightarrow K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $\Leftrightarrow K\left(\frac{(-2)+3}{2};\frac{1+(-2)}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

d. $A(-4;1)$ et $B(-2;-3)$

K milieu de $[AB] \Leftrightarrow K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $\Leftrightarrow K\left(\frac{-4+(-2)}{2};\frac{1+(-3)}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{-6}{2};\frac{-2}{2}\right) \Leftrightarrow K(-3;-1)$

Exercice 10

Dire dans les deux cas si $ABCD$ est un parallélogramme ?

a. $A(-2;5)$, $B(4;3)$, $C(8;-3)$ et $D(2;-1)$

b. $A\left(\frac{9}{2};7\right)$, $B\left(8;\frac{11}{2}\right)$, $C(-5;1)$ et $D\left(-\frac{3}{2};-1\right)$

a. $A(-2;5)$, $B(4;3)$, $C(8;-3)$ et $D(2;-1)$

I milieu de $[AC] \Leftrightarrow I\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ $\Leftrightarrow I\left(\frac{-2+8}{2};\frac{5+(-3)}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{6}{2};\frac{2}{2}\right) \Leftrightarrow I(3;1)$

J milieu de $[BD] \Leftrightarrow J\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)$ $\Leftrightarrow J\left(\frac{4+2}{2};\frac{3+(-1)}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{6}{2};\frac{2}{2}\right) \Leftrightarrow K(3;1)$

On se rend compte que I et J sont confondues et donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et c'est donc un parallélogramme.

b. $A(\frac{9}{2};7)$, $B(8;\frac{11}{2})$, $C(-5;1)$ et $D(-\frac{3}{2};-1)$

I milieu de $[AC] \Leftrightarrow I\left(\frac{\frac{9}{2}+(-5)}{2};\frac{7+1}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{\frac{9}{2}-\frac{10}{2}}{2};\frac{8}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{\frac{1}{2}}{2};\frac{8}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2};4\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{1}{4};4\right)$

J milieu de $[BD] \Leftrightarrow J\left(\frac{8+\left(-\frac{3}{2}\right)}{2};\frac{\frac{11}{2}+(-1)}{2}\right)$ $\Leftrightarrow J\left(\frac{\frac{16}{2}-\frac{3}{2}}{2};\frac{\frac{11}{2}-\frac{2}{2}}{2}\right) \Leftrightarrow J\left(\frac{\frac{13}{2}}{2};\frac{\frac{9}{2}}{2}\right) \Leftrightarrow J\left(\frac{13}{2}\times\frac{1}{2};\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow J\left(\frac{13}{4};\frac{9}{4}\right)$

On se rend compte que I et J sont distincts et donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui ne se coupent pas en en leur milieu et ça n'est donc pas un parallélogramme.

Exercice 11

Dans le repère (O,I,J) quelconque, on donne les points : P(1;1) , Q(2;-1) et R(3;2) .

a) Calculer les coordonnées du milieu A de [PR] .

b) On note S le point tel que PQRS soit un parallélogramme.

Placer S et calculer ses coordonnées.

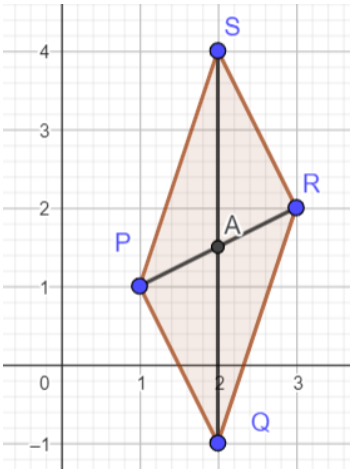
a) Comme A est le milieu de [PR] on aura :
$A\left(\frac{x_P+x_R}{2};\frac{y_P+y_R}{2}\right) = A\left(\frac{1+3}{2};\frac{1+2}{2}\right) = A(2;1{,}5)$

b) PQRS est un parallélogramme
⇔ ses diagonales [PR] et [QS] se coupent en leur milieu
⇔ A est le milieu de $[QS] \Leftrightarrow (2;1{,}5) = \left(\frac{x_Q+x_S}{2};\frac{y_Q+y_S}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (2;1{,}5) = \left(\frac{2+x_S}{2};\frac{-1+y_S}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{2+x_S}{2} \\ 1{,}5 = \frac{-1+y_S}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 2 = 2 + x_S \\ 1{,}5\times 2 = -1 + y_S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2 = x_S \\ 3 + 1 = y_S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x_S \\ 4 = y_S \end{cases}$

$\Leftrightarrow S(2;4)$



Exercice 12

Soit $P(2;-6)$,$Q(-3;-\frac{5}{3})$ et $R(-1;-2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu Kde $[QR]$.
2. En déduire les coordonnées de T tel que PQTR soit un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées $(x_S;y_S)$ du point S tel que $PQRS$ soit un parallélogramme.

Soit $P(2;-6)$,$Q(-3;-\frac{5}{3})$ et $R(-1;-2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu Kde $[QR]$.

K milieu de $[QR] \Leftrightarrow K\left(\frac{x_Q+x_R}{2};\frac{y_Q+y_R}{2}\right)$ $\Leftrightarrow K\left(\frac{-3+(-1)}{2};\frac{-\frac{5}{3}+(-2)}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{-4}{2};\frac{-\frac{5}{3}-\frac{6}{3}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow K\left(\frac{-4}{2};\frac{-\frac{11}{3}}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{-4}{2};-\frac{11}{3}\times\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(-2;-\frac{11}{6}\right)$

2. En déduire les coordonnées de T tel que PQTR soit un parallélogramme.

Si PQTR est un parallélogramme alors K le milieu de $[QR]$ est aussi celui [TP]

Ainsi $K\left(\frac{x_T+x_P}{2};\frac{y_T+y_P}{2}\right)=K\left(-2;-\frac{11}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x_T+x_P}{2}=-2\\ \frac{y_T+y_P}{2}=-\frac{11}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x_T+2}{2}=-2\\ \frac{y_T+(-6)}{2}=-\frac{11}{6}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_T+2=-2\times 2\\ y_T+(-6)=-\frac{11}{6}\times 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_T=-4-2\\ y_T=-\frac{11}{3}+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_T=-6\\ y_T=-\frac{11}{3}+\frac{6\times 3}{1\times 3}\end{cases}$ donc $T\left(-6;\frac{7}{3}\right)$

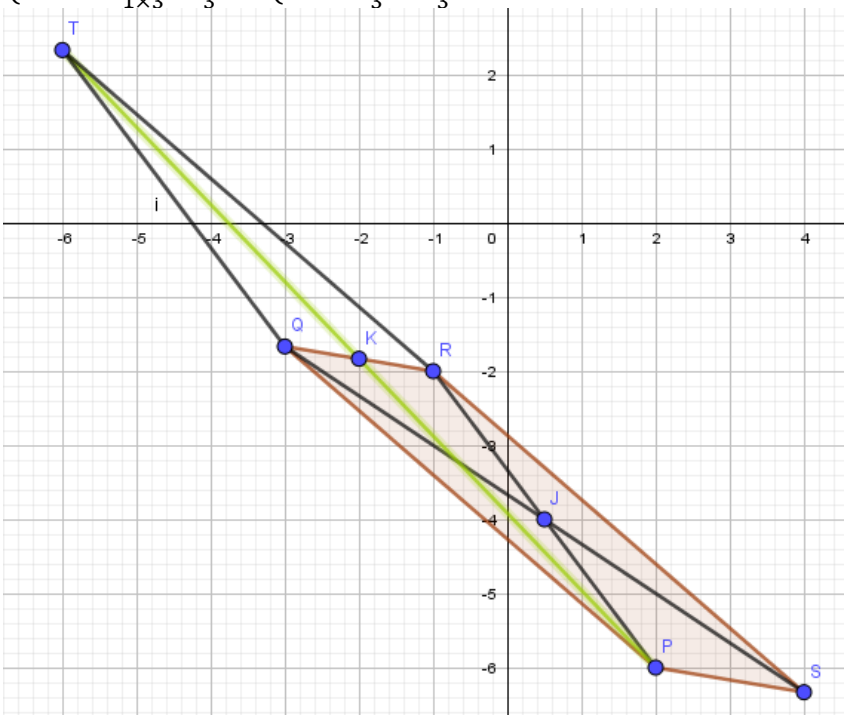
3. Déterminer les coordonnées $(x_S;y_S)$ du point S tel que $PQRS$ soit un parallélogramme.

J milieu de $[PR] \Leftrightarrow J\left(\frac{x_P+x_R}{2};\frac{y_P+y_R}{2}\right)$ $\Leftrightarrow J\left(\frac{2+(-1)}{2};\frac{-6+(-2)}{2}\right) \Leftrightarrow J\left(\frac{1}{2};\frac{-8}{2}\right) \Leftrightarrow J\left(\frac{1}{2};-4\right)$

Si PQRS est un parallélogramme alors J le milieu de $[PR]$ est aussi celui [QS]

$J\left(\frac{x_Q+x_S}{2};\frac{y_Q+y_S}{2}\right)=J\left(\frac{1}{2};-4\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x_Q+x_S}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{y_Q+y_S}{2}=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-3+x_S}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{-\frac{5}{3}+y_S}{2}=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3+x_S=\frac{1}{2}\times 2\\ -\frac{5}{3}+y_S=-4\times 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_S=1+3\\ y_S=-8+\frac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_S=4\\ y_S=-\frac{8\times 3}{1\times 3}+\frac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_S=4\\ y_S=\frac{-24}{3}+\frac{5}{3}\end{cases}$ donc $S\left(4;-\frac{19}{3}\right)$



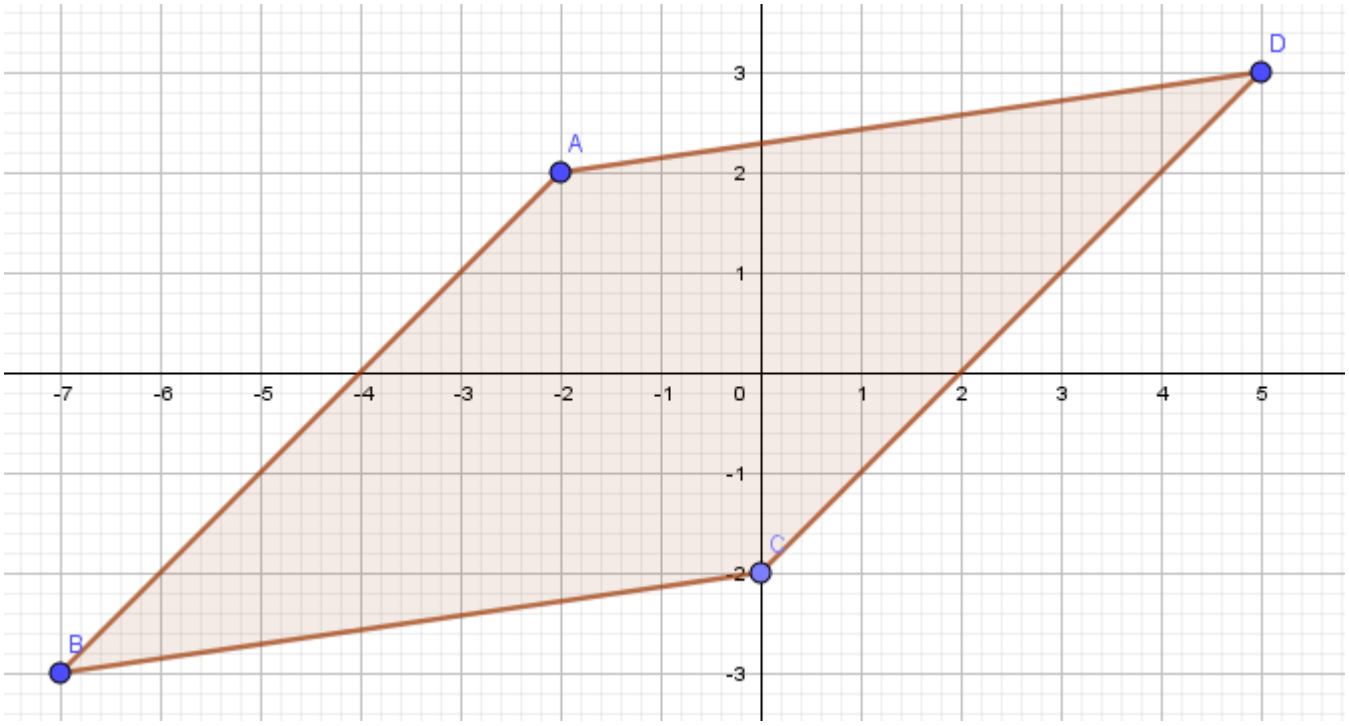
Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

Soit $A(-2;2)$, $B(-7;-3)$, $C(0;-2)$ et $D(5;3)$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Montrer que CBD est isocèle en C.
4. Qu'en déduit-on sur $ABCD$?

1)



2)

$$BA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(-7-(-2)\right)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-7-0)^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$$

$$DC = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + \left(3-(-2)\right)^2} = \sqrt{(+5)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$DA = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{\left(5-(-2)\right)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

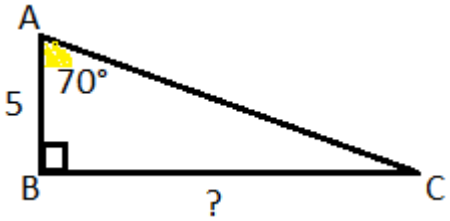
Comme on a AB=CD et AD=BC on a un quadrilatère avec ses côtés deux à deux de même mesure donc ABCD est un parallèlogramme.

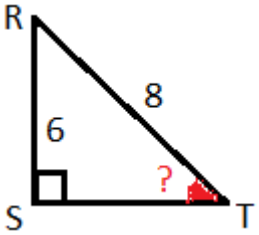
3) on a CB=CD donc BCD est isocèle en C

4) Nous avons donc ABCD qui est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même mesure et donc c'est un losange.

Exercice 14

Déterminer les mesures manquantes dans les figures ci-dessous

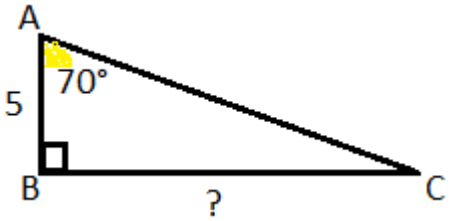




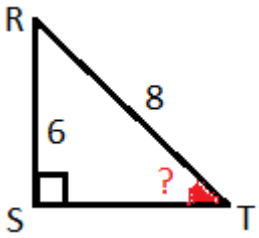
On veut déterminer BC le côté opposé, on pourrait utiliser le triangle 2 ou le triangle 3 du diagramme, comme on connait l'adjacent mais pas l'hypoténuse on prendra le troisième qui nous donne :

Dans ABC rectangle en B on a : $opposé = \tan(x)\, adjacent$

ainsi $BC = \tan\left(\widehat{BAC}\right) AB = \tan(70)\, 5 \approx 13{,}74$



Dans RST rectangle en S on a : $\sin(x) = \frac{opposé}{hypoténuse}$

$\sin(\widehat{STR}) = \frac{RS}{RT} \Leftrightarrow \sin(\widehat{STR}) = \frac{6}{8}$

Donc $\widehat{STR} = \sin^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) \approx 48{,}59°$