Entrainement : variations, parité, repérage

(avec correction courte et allongée de points méthode)

Exercice 1
Soit f, g et h trois fonctions dont il vous faudra étudier la parité.
Pour tout x réel on aura $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = x(5-x^4)$ et $h(x) = 5 + x^3$

Exercice 2
Faire les tableaux de variations des fonctions : carré, cube, racine, inverse, affines
En utilisant les variations de ces tableaux effectuez les comparaisons suivantes sans effectuer de calcul.
$\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-2}$ $\qquad$ 7^3 et $(-9)^3$ $\qquad$ $\sqrt{5}$ et $\sqrt{11}$ $\qquad$ $(-3)^2$ et 2^2

Exercice 3
Soit $A(-1;3)$, $B(1;-2)$ et $C(-9;-6)$ trois points dans $(O;I;J)$ un repère orthonormé.
On admettra que $AB = \sqrt{29}$ et $AC = \sqrt{145}$ et que le triangle ABC est rectangle en B.
Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

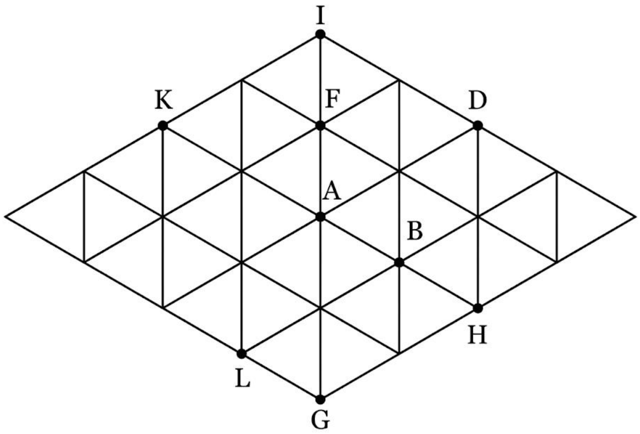
A\ milieux
1) Donner les coordonnées de I le milieu $[AC]$.
2) Donner les coordonnées de D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Vous pouvez utiliser les coordonnées du milieu des diagonales ou utiliser les coordonnées de vecteurs.

B\ longueurs
3) Déterminer la longueur [BC].
4) En déduire une justification la nature de ABC admise dans l'énoncé.

C\ trigonométrie
5) Donner la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant les informations de l'énoncé.

D\ vecteurs
En posant $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$, le repère $(O;I;J)$ est assimilable au repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
6) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ en citant au moins une fois la formule utilisée.
7) Donner les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $-\overrightarrow{AC}$, $4\overrightarrow{BC}$, $-\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$.

Exercice 4
Dans le repère (A ;K ;F) de la figure ci-contre, donnez les coordonnées des points restants.



Correction

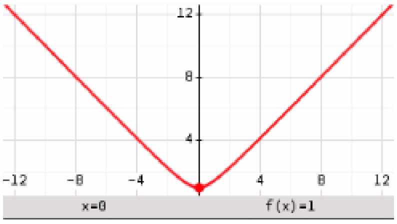
Exercice 1

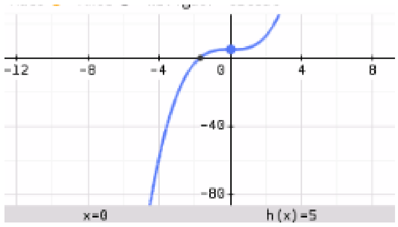
Soit f, g et h trois fonctions dont il vous faudra étudier la parité.

Pour tout x réel on aura $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = x(5-x^4)$ et $h(x) = 5 + x^3$

Point Méthode :

1) On peut commencer par conjecturer la nature de la fonction :
   a) Avec une représentation graphique : si on voit de la symétrie d'axe l'axe des ordonnées on peut penser que la fonction est paire, si on a une symétrie de centre O alors la fonction devrait être impaire et sinon elle devrait être ni paire ni impaire.

   Exemple : 



   f semble paire — pas de symétrie, h semble ni paire ni impaire

   b) Si la fonction est un polynôme dont tous les monômes sont de degré pair, elle sera paire, si ils sont tous de degré impair, elle sera impaire, s'il y a un mix de degré paire et impair alors elle sera ni paire ni impaire.
   Exemple : $g(x) = x(5-x^4) = 5x - x^5$ les monômes sont tous de degré impairs (1 et 5) donc on se doute que g va être impaire.
2) Si on pense qu'elle n'est ni paire ni impaire : on va chercher les images de deux valeurs opposées, généralement 1 et -1. Si on voit que les images ne sont pas égales ça prouve que la fonction ne peut être paire. Si elles ne sont pas opposées, la fonction ne peut être impaire.
   Exemple : $h(1) = 5 + 1^3 = 6$ et $h(-1) = 5 + (-1)^3 = 5 - 1 = 4$
   comme $h(-1) \neq h(1)$ on ne peut avoir $\forall x \in D_h, h(-x) = h(x)$ donc h ne peut être paire.
   comme $h(-1) \neq -h(1)$ on ne peut avoir $\forall x \in D_h, h(-x) = -h(x)$ donc h ne peut être impaire.
3) Si on pense qu'elle est paire ou impaire : on calcule l'image de (-x) (on remplacera tous les x de la fonction par des $(-x)$ puis on simplifiera l'expression en se rappelant que $(-x)^n$ vaut x^n si n est paire, et $-x^n$ si n est impair
   Exemples : Soit $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x)$
   Ainsi $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$ donc f est paire.
   Soit $x \in D_g = \mathbb{R}$ alors $g(-x) = (-x)(5-(-x)^4) = -x(5-x^4) = -\left(x(5-x^4)\right) = -g(x)$
   Ainsi $\forall x \in D_g, g(-x) = -g(x)$ donc g est impaire.

Exercice 2

Faire les tableaux de variations des fonctions : carré, cube, racine, inverse, affines

x	$-\infty$	0	$+\infty$
1/x	↘	‖	↘

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x²	↘	0	↗

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	↗	

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

Fonctions affines $f(x) = ax + b$ avec $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

Fonctions affines $f(x) = ax + b$ avec $a < 0$

En utilisant les variations de ces tableaux effectuez les comparaisons suivantes sans effectuer de calcul.

$\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-2}$ $\quad$ 7^3 et $(-9)^3$ $\quad$ $\sqrt{5}$ et $\sqrt{11}$ $\quad$ $(-3)^2$ et 2^2

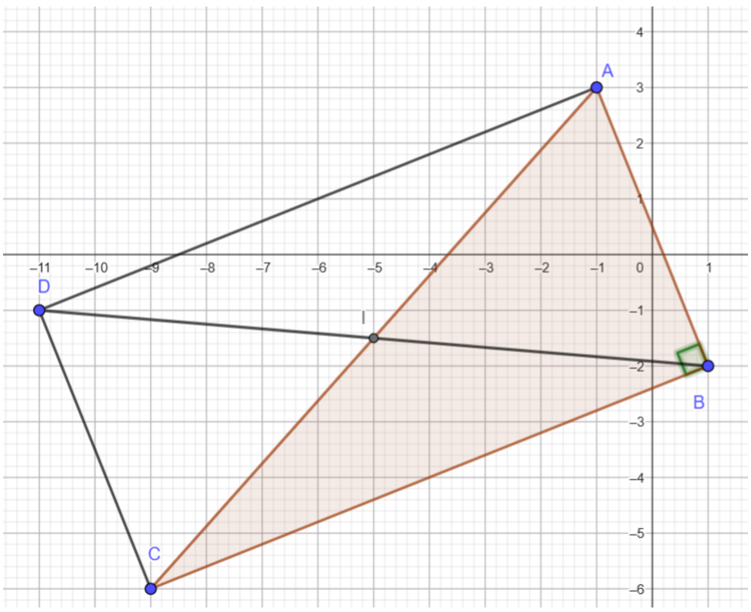
Méthode :
On repère la fonction utilisée, puis les antécédents des images à comparer, puis on vérifie qu'ils sont bien dans un intervalle sur lequel la fonction est monotone. On se servira de la monotonie pour passer de l'ordre des antécédents à l'ordre de leurs images

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ intervalle contenant -5 et -2 , elle changera leur ordre :
$-5 < -2$ => $\frac{1}{-5} > \frac{1}{-2}$

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ intervalle contenant 7 et -9, elle conservera leur ordre ainsi :
$7 > -9$ => $7^3 > (-9)^3$

La fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ intervalle contenant 5 et 11 , elle conservera leur ordre ainsi :
5<11 => $\sqrt{5} < \sqrt{11}$

Comparaison de $(-3)^2$ et 2^2, -3 et 2 ne sont pas sur un intervalle où la fonction carrée est monotone mais $(-3)^2 = 3^2$ donc on peut écrire :
La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ intervalle contenant 3 et 2 , elle conservera leur ordre ainsi :
3>2 => $3^2 > 2^2$ et donc $(-3)^2 > 2^2$



Exercice 3
Soit $A(-1; 3)$, $B(1; -2)$ et $C(-9; -6)$ trois points dans $(O; I; J)$ un repère orthonormé.
On admettra que $AB = \sqrt{29}$ et $AC = \sqrt{145}$ et que le triangle ABC est rectangle en C.
Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A\ milieux
1) Donner les coordonnées de I le milieu $[AC]$.
   $I\left(\frac{x_A+x_C}{2}; \frac{y_A+y_C}{2}\right)$
   $= I\left(\frac{-1+(-9)}{2}; \frac{3+(-6)}{2}\right)$
   $= I(-5; -1{,}5)$
2) Donner les coordonnées de D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Vous pouvez utiliser les coordonnées du milieu des diagonales ou utiliser les coordonnées de vecteurs.
   a. Avec ABCD parallélogramme I le milieu de [AC] sera aussi celui de $[BD]$ ainsi :
   $I\left(\frac{x_B+x_D}{2}; \frac{y_B+y_D}{2}\right) = I(-5; -1{,}5)$ ⇔ $I\left(\frac{1+x_D}{2}; \frac{-2+y_D}{2}\right) = I(-5; -1{,}5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+x_D}{2} = -5 \\ \frac{-2+y_D}{2} = -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x_D = 2 \times (-5) \\ -2 + y_D = 2 \times (-1{,}5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -10 - 1 \\ y_D = -3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow D(-11;-1)$$

b. Avec les vecteurs : ABCD soit un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-(-9)\\y_D-(-6)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x_D + 9 \\ 5 = y_D + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-9 = x_D \\ 5-6 = y_D \end{cases} \Leftrightarrow D(-11;-1)$$

B\ longueurs

3) Déterminer la longueur [BC].

Dans $(O;I;J)$ un repère orthonormé $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-9-1)^2 + (-6-(-2))^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116}$

4) En déduire une justification la nature de ABC admise dans l'énoncé.

D'une part $AC^2 = \sqrt{145}^2 = 145$ d'autre part $AB^2 + BC^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{116}^2 = 145$

Ainsi $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.

C\ trigonométrie

5) Donner la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Par rapport $\widehat{ACB}$ les côtés de mesures $AB = \sqrt{29}$ et $AC = \sqrt{145}$ correspondent respectivement au côté opposé et à l'hypoténuse. On sait que $\sin(\alpha) = \frac{opp}{hyp}$ donc ici $\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$ et donc $\widehat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{145}}\right)$ ainsi $\widehat{ACB} \approx 26{,}57°$

D\ vecteurs

En posant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, le repère $(O;I;J)$ est assimilable au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

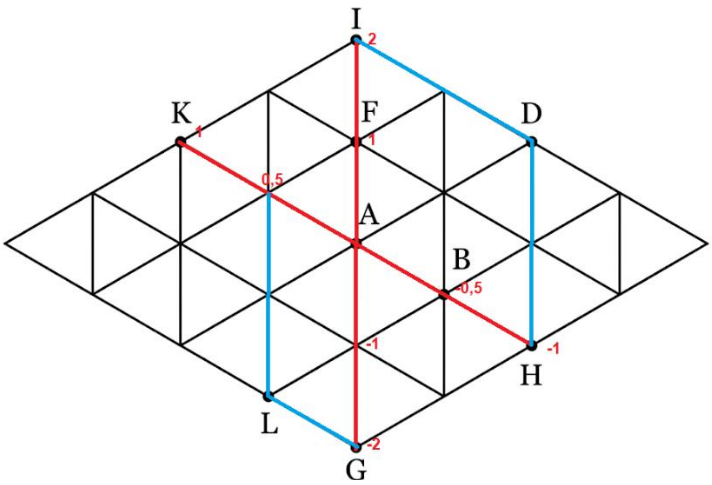
6) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\-2-3\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$

7) $(3\overrightarrow{AB})\begin{pmatrix}3\times 2\\3\times(-5)\end{pmatrix} = (3\overrightarrow{AB})\begin{pmatrix}6\\-15\end{pmatrix}$, $(-\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$, $(4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}-40\\-16\end{pmatrix}$,

$(-\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}8+(-40)\\9+(-16)\end{pmatrix} = (-\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}-32\\-7\end{pmatrix}$

$(3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}6-(-40)\\-15-(-16)\end{pmatrix} = (3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}46\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 4



D(-1 ;2) G(0 ;-2) H(-1 ;0) I(0 ;2) K(1 ;0) L(0,5 ;-2)

Correction (version courte)

Exercice 1

Soit $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x)$
Ainsi $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

Soit $x \in D_g = \mathbb{R}$ alors $g(-x) = (-x)(5-(-x)^4) = -x(5-x^4) = -\left(x(5-x^4)\right) = -g(x)$
Ainsi $\forall x \in D_g, g(-x) = -g(x)$ donc g est impaire.

$h(1) = 5+1^3 = 6$ et $h(-1) = 5+(-1)^3 = 5-1 = 4$
comme $h(-1) \neq h(1)$ on ne peut avoir $\forall x \in D_h, h(-x) = h(x)$ donc h ne peut être paire.
comme $h(-1) \neq -h(1)$ on ne peut avoir $\forall x \in D_h, h(-x) = -h(x)$ donc h ne peut être impaire.

Exercice 2

- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ intervalle contenant -5 et -2 , elle changera leur ordre : $-5 < -2$ => $\frac{1}{-5} > \frac{1}{-2}$
- La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ intervalle contenant 7 et -9, elle conservera leur ordre ainsi : $7 > -9$ => $7^3 > (-9)^3$
- La fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ intervalle contenant 5 et 11 , elle conservera leur ordre ainsi :5<11 => $\sqrt{5} < \sqrt{11}$
- Comparaison de $(-3)^2$ et 2^2, -3 et 2 ne sont pas sur un intervalle où la fonction carrée est monotone mais $(-3)^2 = 3^2$ donc on peut écrire :
  La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ intervalle contenant 3 et 2 , elle conservera leur ordre ainsi : 3>2 => $3^2 > 2^2$ et donc $(-3)^2 > 2^2$

Exercice 3

8) $I\left(\frac{x_A+x_C}{2}; \frac{y_A+y_C}{2}\right) = I\left(\frac{-1+(-9)}{2}; \frac{3+(-6)}{2}\right) = I(-5; -1{,}5)$.
9) Donner les coordonnées de D le point tel que ABCD soit un parallélogramme.
   a. Avec ABCD parallélogramme I le milieu de [AC] sera aussi celui de $[BD]$ ainsi :
   $I\left(\frac{x_B+x_D}{2}; \frac{y_B+y_D}{2}\right) = I(-5; -1{,}5) \Leftrightarrow I\left(\frac{1+x_D}{2}; \frac{-2+y_D}{2}\right) = I(-5; -1{,}5)$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+x_D}{2} = -5 \\ \frac{-2+y_D}{2} = -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x_D = 2 \times (-5) \\ -2+y_D = 2 \times (-1{,}5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -10-1 \\ y_D = -3+2 \end{cases} \Leftrightarrow D(-11; -1)$
10) Dans $(O; I; J)$ un repère orthonormé $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
   $= \sqrt{(-9-1)^2 + (-6-(-2))^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116}$
11) En déduire une justification la nature de ABC admise dans l'énoncé.
   D'une part $AC^2 = \sqrt{145}^2 = 145$ d'autre part $AB^2 + BC^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{116}^2 = 145$ Ainsi $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.
12) Donner la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
   Par rapport $\widehat{ACB}$ les côtés de mesures $AB = \sqrt{29}$ et $AC = \sqrt{145}$ correspondent respectivement au côté opposé et à l'hypoténuse. On sait que $\sin(\alpha) = \frac{opp}{hyp}$ donc ici $\sin\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{AB}{AC}$ et donc $\widehat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{145}}\right)$
   ainsi $\widehat{ACB} \approx 26{,}57°$
13) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -2-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$
14) $(3\overrightarrow{AB})\begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times (-5) \end{pmatrix} = (3\overrightarrow{AB})\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}, (-\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}, (4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} -40 \\ -16 \end{pmatrix},$
   $(-\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} 8+(-40) \\ 9+(-16) \end{pmatrix} = (-\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} -32 \\ -7 \end{pmatrix}$
   $(3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} 6-(-40) \\ -15-(-16) \end{pmatrix} = (3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} 46 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

D(-1 ;2) G(0 ;-2) H(-1 ;0) I(0 ;2) K(1 ;0) L(0,5 ;-2)