Entrainement :
Inéquations et variations (light)

Exercice 1

Voici trois inéquations :

$-9 + 7x \geq 3x + 7$ $\quad (I_1)$

$(-4x + 5)(2 + 3x) < 0$ $\quad (I_2)$

$\frac{7-6x}{2x+3} \geq \frac{15x+2}{4-5x}$ $\quad (I_3)$

1) Résoudre (I_1)
2) Résoudre (I_2)
3) Résolution de la dernière inéquation :
   a. Déterminer les valeurs interdites et le domaine d'étude.
   b. Prouver que sur D_e on a : $(I_3) \Leftrightarrow \frac{22-108x}{(2x+3)(4-5x)} \geq 0$
   c. Faire le tableau de signe de $\frac{22-108x}{(2x+3)(4-5x)} \geq 0$
   d. En déduire les solutions de (I_3)

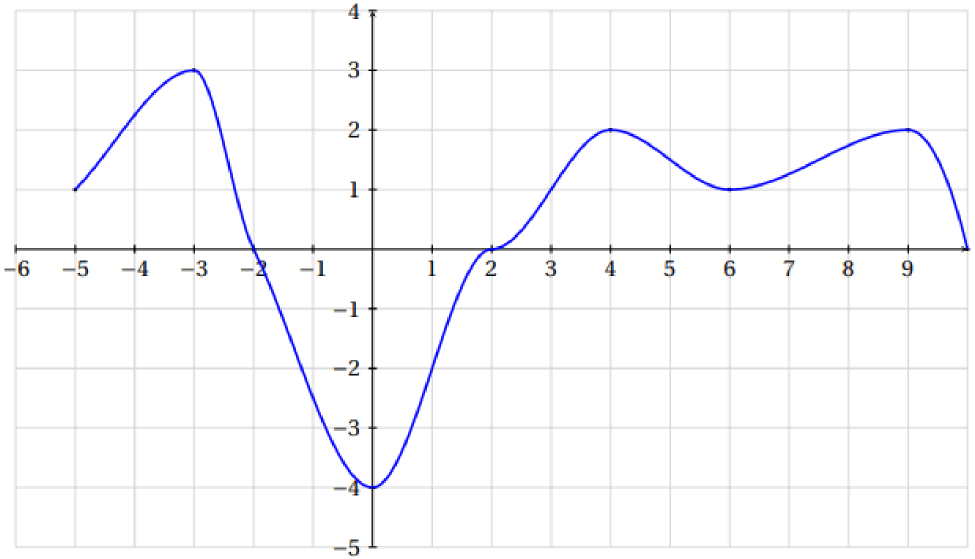
Exercice 2

x	-5		-2		$0,5$		2		3
Variations de f	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$2,5$	$\searrow$	$1,5$

a) Si possible comparer $f(-4)$ et $f(-3)$
b) Si possible comparer $f(2,2)$ et $f(2,6)$
c) Si possible comparer $f(-1)$ et $f(1)$
d) Prouver que 2,5 est le maximum de f sur $[0,5; 3]$

Exercice 3

Soit f la fonction représentée dans le repère ci-dessous



1) Dresser le tableau de variations de la fonction

x	
$f(x)$	

2) Donner les images de 4 et 8

$f(4)$ .... $\quad f(8)$ ....

3) Donner les antécédents de 4 , 3 et -2

antécédents de 4 : ....

antécédents de 3 : ....

antécédents de -2 : ....

Correction

Exercice 1

1) Résoudre (I_1)

$(\mathrm{I}_1) \Leftrightarrow 7x - 3x \geq 7 + 9 \Leftrightarrow 4x \geq 16 \Leftrightarrow x \geq \frac{16}{4}$

$S = [4; +\infty[$

2) Résoudre (I_2)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$-4x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{5}{4}; +\infty[$$

3) Résolution de la dernière inéquation :

a) Recherche des valeurs interdites :

$$2\mathrm{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} = -3 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{-3}{2}$$

$$4 - 5\mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow -5\mathrm{x} = -4 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{-4}{-5} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{4}{5}$$

b) Ainsi sur $\mathrm{D_e} = \mathbb{R} - \left\{\frac{-3}{2}; \frac{4}{5}\right\}$ $\frac{7-6x}{2x+3} \geq \frac{15x+2}{4-5x} \Leftrightarrow \frac{7-6x}{2x+3} - \frac{15x+2}{4-5x} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(7-6x)(4-5x)}{(2x+3)(4-5x)} - \frac{(15x+2)(2x+3)}{(4-5x)(2x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{28-35x-24x+30x^2}{(2x+3)(4-5x)} - \frac{30x^2+45x+4x+6}{(4-5x)(2x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{28-35x-24x+30x^2-30x^2-45x-4x-6}{(2x+3)(4-5x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{22-108x}{(2x+3)(4-5x)} \geq 0$

c) Valeurs d'annulation : Au numérateur on aura :

$$22 - 108x = 0 \Leftrightarrow -108x = -22 \Leftrightarrow x = \frac{-22}{-108} \Leftrightarrow x = \frac{11}{54}$$

Au dénominateur on aura les deux valeurs interdites : $\frac{-3}{2}$ et $\frac{4}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{11}{54}$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$22-108x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4-5x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

d) $S =]-\frac{3}{2}; 11/54] \cup]4/5 ; +\infty[$

x	-5		-2		$0,5$		2		3
Variations de f	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$2,5$	$\searrow$	$1,5$

Exercice 2

a) Si possible comparer $f(-4)$ et $f(-3)$

-4 et 3 sont dans $[-5; -2]$ intervalle surlequel f est croissante et donc conserve l'ordre ainsi $-4 < 3 \Rightarrow f(-4) \leq f(3)$.

b) Si possible comparer $f(2{,}2)$ et $f(2{,}6)$

2,2 et 2,6 sont dans $[2; 3]$ intervalle sur lequel f est décroissante et donc change l'ordre ainsi $2{,}2 < 2{,}6 \Rightarrow f(2{,}2) \geq f(2{,}6)$.

c) Si possible comparer $f(-1)$ et $f(1)$

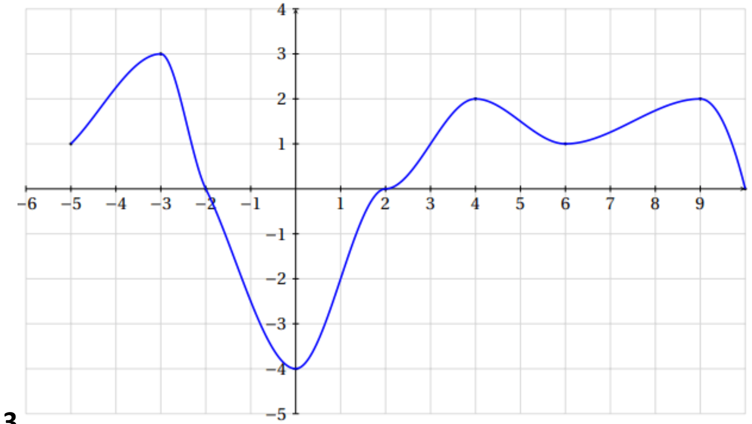
Il n'y pas d'intervalle contenant -1 et 1 sur lequel la fonction f soit monotone donc à priori on ne peut comparer $f(-1)$ et $f(1)$ avec le tableau de variations.

d) Prouver que 2,5 est le maximum de f sur $[0{,}5; 3]$

$f(2) = 2{,}5$ donc 2,5 est une valeur atteinte par f sur $[0{,}5; 3]$

Si $x \in [0{,}5; 2]$ intervalle où f est croissante donc conserve l'ordre $x \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(2)$

Si $x \in [2; 3]$ intervalle où f est décroissante donc change l'ordre $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(2)$ ainsi $f(x) \leq f(2)$ sur $[0{,}5; 3]$ et comme $f(2) = 2{,}5$ est atteinte sur cet intervalle c'est bien le maximum de f sur cet intervalle



Exercice 3

1)

x	-5		-3		0		4		6		9		10
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

2) $f(4) = 2$ et $f(8) \approx 1{,}7$

3) 4 n'a pas d'antécédent par f 3 a un unique antécédent par f : -3

-2 a deux antécédents par f : environ -1,3 et exactement 1.