

La course de la faim



En une minute, la chenille avance à 75 centimètres, et la sauterelle, 360 mètres. Quand elles sont affamées, la chenille diminue de 1 cm la distance parcourue par minute, alors que la sauterelle perd 10 % de la distance au fur et à mesure. La chenille se nourrit de feuille, alors que la sauterelle d'insectes type mouche, chenille, larves.

- 1) Sachant que la chenille se dirige vers une feuille à une distance de 13,6 m et que la sauterelle est située à 3,5 km de la chenille, laquelle se nourrira la première ?
- 2) Que se passe-t-il quand la feuille est à 20m devant la chenille ?
- 3) Comment déterminer à partir de quelle distance doit-on placer la feuille pour que la sauterelle l'emporte ?

La course de la faim



En une minute, la chenille avance à 75 centimètres, et la sauterelle, 360 mètres. Quand elles sont affamées, la chenille diminue de 1 cm la distance parcourue par minute, alors que la sauterelle perd 10 % de la distance au fur et à mesure. La chenille se nourrit de feuille, alors que la sauterelle d'insectes type mouche, chenille, larves.

- 1) Sachant que la chenille se dirige vers une feuille à une distance de 13,6 m et que la sauterelle est située à 3,5 km de la chenille, laquelle se nourrira la première ?
- 2) Que se passe-t-il quand la feuille est à 20m devant la chenille ?
- 3) Comment déterminer à partir de quelle distance doit-on placer la feuille pour que la sauterelle l'emporte ?

Pistes :

Partie 1

Trouver un repère

Pour chaque animal trouver les trois premières positions

Fin de la partie (question initiale avec une feuille à 1m36)

Partie 2

On agrandi la distance entre la feuille et la chenille

Pour chaque animal :

Trouver une formule pour déterminer les avancées en fonctions du temps

Trouver une formule pour passer d'une position à la suivante

Trouver une condition d'arrêt pour la recherche

Essayer de remplir un tableau

Se rendre compte que ça sera trop long

Aller vers une automatisation de la recherche.

Eléments de correction :

On peut essayer de déterminer quand est ce que la chenille va atteindre la feuille.

Durant la première minute elle avance de 75, puis durant la suivante de 74, puis 73 et ainsi de suite

Si on regarde le chemin total parcouru :

On a 75 cm, puis 75 + 74, puis 75 + 74 + 73, puis 75 + 74 + 73 + 72

On pourrait tester à la main cette série de valeurs jusqu'à voir quand est ce que l'on atteint ou dépasse 13 600 cm

A la main c'est long et pénible et on peut se demander s'il n'y a pas plus efficace...

On peut remarquer que la distance parcourue est égale à

75 puis :

75 + 75 - 1 (après 2minutes), puis :

75 + 75 - (1+2) (après 3 minutes), puis :

75 + 75 + 75 - (1+2+3) (après 4 minutes), c'est-à-dire $75 * 4 - (1+..+(4-1))$

...

75 + 75 + ... + 75 - (1 + 2 + ... + (n-2) + (n-1)), c'est-à-dire $75 * n - (1+2+...+(n-2)+(n-1))$

Ça ne nous avance pas tant que ça car $(1+2+...+(n-2)+(n-1))$ est une somme à faire à la main ... à moins qu'il existe une formule sympa pour résumer tout ça :

1					
2					
3					
4					
5					

On peut voir ici que $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ en termes de carreaux c'est la moitié du nombre de carreaux dans le grand rectangle : $5 * 6 = 30$, autrement dit 15 carreaux

Du coup avec la même logique $(1+2+...+(n-2)+(n-1))$

ça doit faire la moitié de $(n - 1) \times n$ autrement dit $\frac{(n-1)n}{2}$

on intuise qu'après n minutes on aura parcouru $75n - \frac{(n-1)n}{2}$

on peut rentrer cette formule dans le tableur de notre calculatrice et on obtient :

rad		SUITES	
		Suites	Graphique
		Tableau	
Régler l'intervalle			
n	u_n		
0	0		
1	75		
2	149		
3	222		
4	294		
5	365		
6	435		
7	504		

rad		SUITES	
		Suites	Graphique
		Tableau	
Régler l'intervalle			
n	u_n		
17	1139		
18	1197		
19	1254		
20	1310		
21	1365		
22	1419		

Donc là on voit qu'il nous faut 21 minutes pour atteindre notre objectif.

La question qui demeure c'est : est ce que la sauterelle peut rattraper la chenille avant qu'elle ne mange la feuille ?

En 21 minutes, si elle faisait des bonds de 360 mètres du début à la fin elle parcourerait alors la distance de 7560 mètres, donc elle aurait largement rattrapé notre chenille qui elle sera à $3500 + 360 + 13,6$ mètres

Mais la sauterelle elle aussi est affamée et ses bonds vont progressivement perdre en ampleur.

Le premier est de 360 mètres,

le suivant de $360 - \frac{10}{100} 360 = 360 \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 360 \times \frac{90}{100} = 349$ mètres

et oui perdre 10% c'est garder $\frac{90}{100}$

le suivant sera de $349 \times 0,9$ c'est-à-dire de $360 \times 0,9^2$

le suivant avec la même logique sera de $360 \times 0,9^3$

donc en 21 minutes la distance parcourue sera de :

$$360 + 360 \times 0,9 + 360 \times 0,9^2 + \dots + 360 \times 0,9^{20}$$

$$= 360(1 + 0,9 + \dots + 0,9^{19} + 0,9^{20})$$

La technique du rectangle ne marchera pas ici, on est obligé de se contenter la somme à la main... à moins d'avoir du génie, une intuition de folie ou un ami qui en sait un peu plus :

Astuce de connaisseur :

Si on multiplie notre somme entre parenthèses par 0,9 on obtient après développement :

$$0,9(1 + 0,9 + \dots + 0,9^{19} + 0,9^{20}) = 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^{20} + 0,9^{21}$$

On a presque les mêmes termes que dans notre somme de base

Du coup si on soustrait :

$$(1 + 0,9 + \dots + 0,9^{19} + 0,9^{20}) - 0,9(1 + 0,9 + \dots + 0,9^{19} + 0,9^{20})$$

On obtient :

$$1 - 0,9^{21}$$

$$\text{Ainsi } (1 + 0,9 + \dots + 0,9^{19} + 0,9^{20})(1 - 0,9) = 1 - 0,9^{21}$$

Ce qui veut dire que notre somme vaut :

$$(1 + 0,9 + \dots + 0,9^{19} + 0,9^{20}) = \frac{1 - 0,9^{21}}{(1 - 0,9)}$$

Conclusion : en 21 minutes la distance parcourue sera de :

$$360(1 + 0,9 + \dots + 0,9^{19} + 0,9^{20}) = 360 \frac{1 - 0,9^{21}}{(1 - 0,9)} \approx 3206,09 \text{ mètres} < 3500$$

La sauterelle n'arrive même pas à la position initiale de la chenille.

Celle-ci atteint bien la feuille à la 21^{ème} minute avant l'arrivée de la sauterelle.

Approche pour ceux qui maîtrisent python : une simulation

```
Sauterelle = 0          # position de la Sauterelle par rapport à
# son point de départ
Chenille = 3500        # position de la chenille par rapport au
#point de départ de la sauterelle
Feuille = 3500 + 20    # position de la feuille par rapport
#au point de départ de la sauterelle
Av_Sau=360
Av_Che=0.75
temps = 0
while Sauterelle<Chenille<Feuille :
    Sauterelle += Av_Sau
    Chenille += Av_Che
    temps+=1
    Av_Sau *=(1-10/100)
    Av_Che -= 0.01
print(f"au bout de {temps} minutes on aura les positions")
print(f"suivantes : - Sauterelle {Sauterelle} m. ")
print(f"      - Chenille {Chenille} m. ")
print(f"      - Feuille {Feuille} m. ")
if Sauterelle>Chenille :
    print("la Sauterelle mange la chenille.")
if Chenille>Feuille :
    print("la chenille mange la feuille.")
```

vous pouvez tester ça à l'adresse suivante :

<https://www.programiz.com/online-compiler/4Q1NbC56WjiWI>

Snake (en P5.js)

```
if (going==true){  
    X+=dirX[dir%4];  
    Y+=dirY[dir%4];  
    couleur =get(X+c*dirX[dir%4],Y+c*dirY[dir%4]);  
    if ((couleur[0] == 255) && (couleur[1] == 255) && (couleur[2] == 255))  
        {square(X,Y,c);}  
    else { going=false;fill(255,0,0); circle(X,Y,c*5);}  
}  
else {}  
}  
function keyPressed() {  
    if (keyCode === LEFT_ARROW) { dir-=1; }  
    else if (keyCode === RIGHT_ARROW) { dir+=1; }  
    else if (key === 'p') { going=!going; }  
}  
}  
  
function draw() {  
    fill(0);  
    // Code to draw the snake and its food  
}
```