**Exercice 1** $2(1-3i)=2-6i$ $\quad$ $(1+i)^2=1^2+2\times1\times i+i^2=1+2i-1=2i$

$(3+2i)(2-i)=6-3i+4i-2i^2=6+i-2(-1)=8+i$

**Exercice 2** Résoudre l'équation $x^2+2x+2=0$.
Vérifier que les deux nombres complexes trouvés sont bien solutions de l'équation.
On reconnait une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=2$ et $c=2$.
Ainsi $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times2=4-8=-4<0$ ainsi l'équation a deux solutions complexes :
$x_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-i\sqrt{4}}{2}=-1-i$ et $x_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+i\sqrt{4}}{2}=-1+i$

**Exercice 3** Résoudre les équations :

a) $x^2+2x+65=0$
$a=1$, $b=2$ et $c=65$
$\Delta=2^2-4\times1\times65=-256<0$
Donc deux solutions complexes :
$x_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-i\sqrt{256}}{2}=-1-8i$
et $x_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+i\sqrt{256}}{2}=-1+8i$

b) $r^2+4r+4=0$
$a=1$, $b=4$, $c=4$
$\Delta=4^2-4\times1\times4=0$
donc une solution réelle :
$r_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2}=-2$

c) $z^2-3z-4=0$
$a=1$, $b=-3$ et $c=-4$
$\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=25>0$
Donc deux solutions réelles :
$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{25}}{2}=-1$
Et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{25}}{2}=4$

d) $z^2=-4\Leftrightarrow z^2+0z+4=0$
$a=1$, $b=0$, $c=4$
$\Delta=0^2-4\times1\times4=-16<0$
donc deux solutions complexes :
$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{0-i\sqrt{16}}{2}=-2i$
et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{0+i\sqrt{16}}{2}=+2i$

e) $z^2=7\Leftrightarrow z^2+0z-7=0$
$a=1$, $b=-3$ et $c=-4$
$\Delta=0^2-4\times1\times(-7)=28>0$
Donc deux solutions réelles :
$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0-\sqrt{28}}{2}=-\sqrt{7}$
Et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0+\sqrt{28}}{2}=\sqrt{7}$

f) $z^2-4z+8=0$
$a=1$, $b=0$, $c=4$
$\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=-16<0$
donc deux solutions complexes :
$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4-i\sqrt{16}}{2}=2-2i$
et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4+i\sqrt{16}}{2}=2+2i$

g) $r^2-\frac{1}{2}r+\frac{1}{8}=0$
$a=1$, $b=-\frac{1}{2}$ et $c=\frac{1}{8}$
$\Delta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\times1\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}<0$
Donc deux solutions complexes :
$r_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{1}{4}}}{2}=\frac{1}{4}-i\frac{1}{4}$
Et $r_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{1}{4}}}{2}=\frac{1}{4}+i\frac{1}{4}$

h) $r^2-3r+3=0$
$a=1$, $b=-3$, $\quad c=3$
$\Delta=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$
donc deux solutions complexes :
$r_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
et $r_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

**Exercice 4** On considère l'équation $y'-3y=8t$.
Vérifier que la fonction y définie par $y(t)=e^{3t}-\frac{8}{3}t-\frac{8}{9}$ est une solution de cette équation.

$$y'(t)=3e^{3t}-\frac{8}{3}$$

ainsi $y' - 3y = 3e^{3t} - \frac{8}{3} - 3\left(e^{3t} - \frac{8}{3}t - \frac{8}{9}\right) = 3e^{3t} - \frac{8}{3} - 3e^{3t} + 8t + \frac{8}{9} = 8t$ CQFD
⇔
**Exercice 5** On considère l'équation $y'' - y' - 6y = 0$

1. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = e^{-2x}$est une solution de cette équation.

$f'(x) = -2e^{-2x}$ $\quad f''(x) = 4e^{-2x}$ ainsi $f'' - f' - 6f = 4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0e^{-2x} = 0$
Ainsi $y'' - y' - 6y = 0$ quand $f(x) = e^{-2x}$CQFD

2. Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = e^{3x}$est une autre solution de cette équation.

$g'(x) = 3e^{3x}$ $g''(x) = 9e^{3x}$ ainsi $g'' - g' - 6g = 9e^{3x} - 3e^{3x} - 6e^{3x} = 0e^{3x} = 0$
Ainsi $y'' - y' - 6y = 0$ quand $g(x) = e^{3x}$CQFD

3. Montrer que la fonction $h = f + g$est alors aussi solution.

$h' = f' + g'$ et $h'' = f'' + g''$ et donc $h'' - h' - 6h = f'' + g'' - f' - g' - 6f - 6g = (f'' - f' - 6f) + (g'' - g' - 6g) = 0 + 0 = 0$ CQFD

**Exercice 6** On considère l'équation $y' - y = x - 1$.
Montrer que la fonction y définie par $y(x) = -x$est une solution de cette équation.
$y'(x) = -1$ et donc $y' - y = -1 - (-x) = x - 1$ CQFD
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} - x$est aussi solution de cette équation.
$f'(x) = e^{x} - 1$ et donc $f'(x) - f(x) = e^{x} - 1 - (e^{-x} - x) = e^{x} - 1 - e^{-x} + x = x - 1$

**Exercice 7** On considère l'équation $y' - 2y = -2x^2 - 2x$
Montrer que la fonction y définie par $y(x) = (x + 1)^2$est solution de cette équation.
$y(x) = (x + 1)^2$ on reconnait $u^n \to n\, u'u^{n-1}$ avec $u = x + 1$ et $u' = 1$
On a donc $y'(x) = 2 \times 1 \times (x + 1) = 2x + 2$

$$y' - 2y = 2x + 2 - 2(x + 1)^2 = 2x - 2 - 2(x^2 + 2x + 1) = 2x - 2 - 2x^2 - 4x - 2 = -2x^2 - 2x$$

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} + (x + 1)^2$est aussi solution de cette équation.
$f(x) = e^{2x} + (x + 1)^2$ donc $f'(x) = 2\,e^{2x} + (2x + 2)$

$$f' - 2f = 2\,e^{2x} + (2x + 2) - 2(e^{2x} + (x + 1)^2) = 2\,e^{2x} - 2\,e^{2x} + (2x + 2) - 2(x + 1)^2$$
$$= -2x^2 - 2x$$

**Exercice 8**
Résoudre l'équation $2y' + 4y = 3$, en recherchant une fonction constante solution particulière.

La solution générale de l'équation différentielle (E) : $ay' + by = c$est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation sans second membre (E0) : $ay' + by = 0$.
Solution générale de l'équation sans second membre (E0) : $ay' + by = 0$ est $ke^{-\frac{b}{a}t}$. Donc l'équation sans second membre $2y' + 4y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y = ke^{-\frac{b}{a}t}$⇔$y = ke^{-\frac{4}{2}t}$
⇔$y = k\,e^{-2t}$
Solution particulière : $y_p = a$ et $y_p' = 0$ donc $2y_p' + 4y_p = 3$⇔$2 \times 0 + 4 \times a = 3$⇔$4a = 3$ ⇔$a = \frac{4}{3}$
Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme $y = \frac{4}{3} + k\,e^{-2t}$

**Exercice 9**
Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 4x - 1$, en cherchant une solution particulière sous la forme. $y_p(x) = ax + b$.
$y_p$Solution de $y' + 2y = 4x - 1$⇔$y_p' + 2y_p = 4x - 1$⇔$a + 2(ax + b) = 4x - 1$
⇔$a + 2ax + 2b = 4x - 1$⇔$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ 2a = 4 \end{cases}$⇔$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a = \frac{4}{2} \end{cases}$⇔$\begin{cases} 2 + 2b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$⇔$\begin{cases} b = \frac{-1-2}{2} \\ a = 2 \end{cases}$

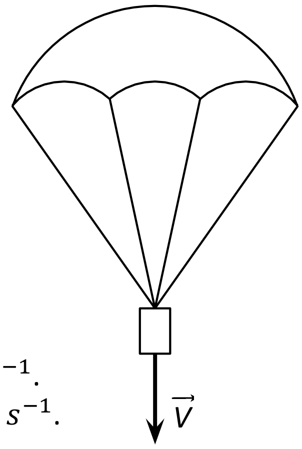
$$y_p = 2x - \frac{3}{2}$$

Solution générale de l'équation sans second membre (E0) : $ay' + by = 0$ est $ke^{-\frac{b}{a}t}$. Donc l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y = ke^{-\frac{b}{a}t} \Leftrightarrow y = ke^{-2t}$
Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme $y = 2x - \frac{3}{2} + k\, e^{-2t}$

**Exercice 10**
Résoudre l'équation différentielle $y' + 3y = e^{-t}$, en recherchant une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Ae^{-t}$ donc $y_p'(t) = A(-1)e^{-t}$.
$y_p$Solution de $y' + 3y = e^{-t} \Leftrightarrow y_p' + 3y_p = e^{-t} \Leftrightarrow A(-1)e^{-t} + 3Ae^{-t} = e^{-t}$
$\Leftrightarrow Ae^{-t}(-1+3) = e^{-t}$ $\Leftrightarrow A(+2) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$ ainsi : $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$
Solution générale de l'équation sans second membre (E0) : $ay' + by = 0$ est $ke^{-\frac{b}{a}t}$. Donc l'équation sans second membre $y' + 3y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y = ke^{-\frac{b}{a}t} \Leftrightarrow y = ke^{-3t}$
Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme $y = \frac{1}{2}e^{-t} + k\, e^{-3t}$

**Exercice 11**
Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 12$. Déterminer alors la solution vérifiant $y(0) = 1$.
$y_p = c$Solution de $y' + 3y = 12 \Leftrightarrow y_p' + 3y_p = 12 \Leftrightarrow 0 + 3c = 12 \Leftrightarrow c = \frac{12}{3}$ $\Leftrightarrow c = 4$
ainsi : $y_p(t) = 4$
Solution générale de l'équation sans second membre (E0) : $ay' + by = 0$ est $ke^{-\frac{b}{a}t}$. Donc l'équation sans second membre $y' + 3y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y = ke^{-\frac{b}{a}t} \Leftrightarrow y = ke^{-3t}$
Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme $y = 4 + k\, e^{-3t}$
On veut maintenant que cette solution vérifie $y(0) = 1 \Leftrightarrow 4 + k\, e^{-3\times 0} = 1 \Leftrightarrow 4 + k = 1 \Leftrightarrow k = 1 - 4$
Ainsi $y = 4 - 3\, e^{-3t}$

**Exercice 12**

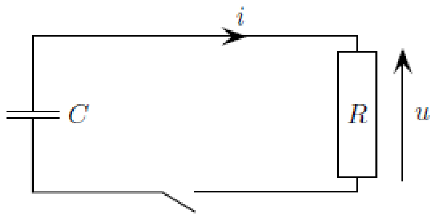



Vitesse d'un parachute La vitesse d'un objet suspendu à un parachute est solution de l'équation (E) : $mv'(t) + kv(t) = mg$.
On prendra : m = 10kg, g = 10m.s−2 et k = 25 u.S.I.
1. Déterminer la fonction constante $v_p$solution de (E).
Donner alors l'ensemble des solutions de (E).
2. a) Donner la solution $v_1$de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_1(0) = 5m.s^{-1}$.
   b) Donner la solution $v_2$de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_2(0) = 10m.s^{-1}$.
   c) Donner la solution $v_3$de l'équation (E) dont la vitesse initiale est nulle.
   d) Déterminer les limites lorsque $t \to +\infty$des fonctions $v_1$, $v_2$et $v_3$.

$v_p = c$Solution de $mv'(t) + kv(t) = mg \Leftrightarrow mv_p'(t) + kv_p(t) = mg \Leftrightarrow m0 + kc = mg$
$\Leftrightarrow c = \frac{mg}{k}$ ainsi une solution particulière est : $v_p(t) = \frac{mg}{k}$
En prennant : m = 10kg, g = 10m.s−2 et k = 25 u.S.I. : $v_p(t) = \frac{10\times 10}{25} = 4$
Solution générale de l'équation sans second membre (E0) : $ay' + by = 0$ est $ke^{-\frac{b}{a}t}$. Donc l'équation sans second membre $mv'(t) + kv(t) = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $v = ke^{-\frac{k}{m}t}$
Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme $v(t) = \frac{mg}{k} + ke^{-\frac{k}{m}t} \Leftrightarrow v(t) = 4 + ke^{-2,5t}$
2a)
On veut maintenant que cette solution vérifie $v_1(0) = 5m.s^{-1} \Leftrightarrow 5 = 4 + ke^{-2,5\times 0} \Leftrightarrow 5 = 4 + k$
$\Leftrightarrow k = 1$
Ainsi $v_1(t) = 4 + e^{-2,5t}$

2b)
On veut maintenant que cette solution vérifie $v_2(0) = 10m.s^{-1} \Leftrightarrow 10 = 4 + ke^{-2,5\times 0} \Leftrightarrow 10 = 4 + k$
$\Leftrightarrow k = 6$
Ainsi $v_2(t) = 4 + 6e^{-2,5t}$
2c)
On veut maintenant que cette solution vérifie $v_3(0) = 0m.s^{-1} \Leftrightarrow 0 = 4 + ke^{-2,5\times 0} \Leftrightarrow 0 = 4 + k$
$\Leftrightarrow k = -4$
Ainsi $v_0(t) = 4 - 4e^{-2,5t}$
2d)
lorsque $t \to +\infty$ on a $-2,5t \to -\infty$ et donc on a $e^{-2,5t} \to 0$ et donc nos trois fonctions vont tendre vers $4 + k0 = 4$

**Exercice 13**



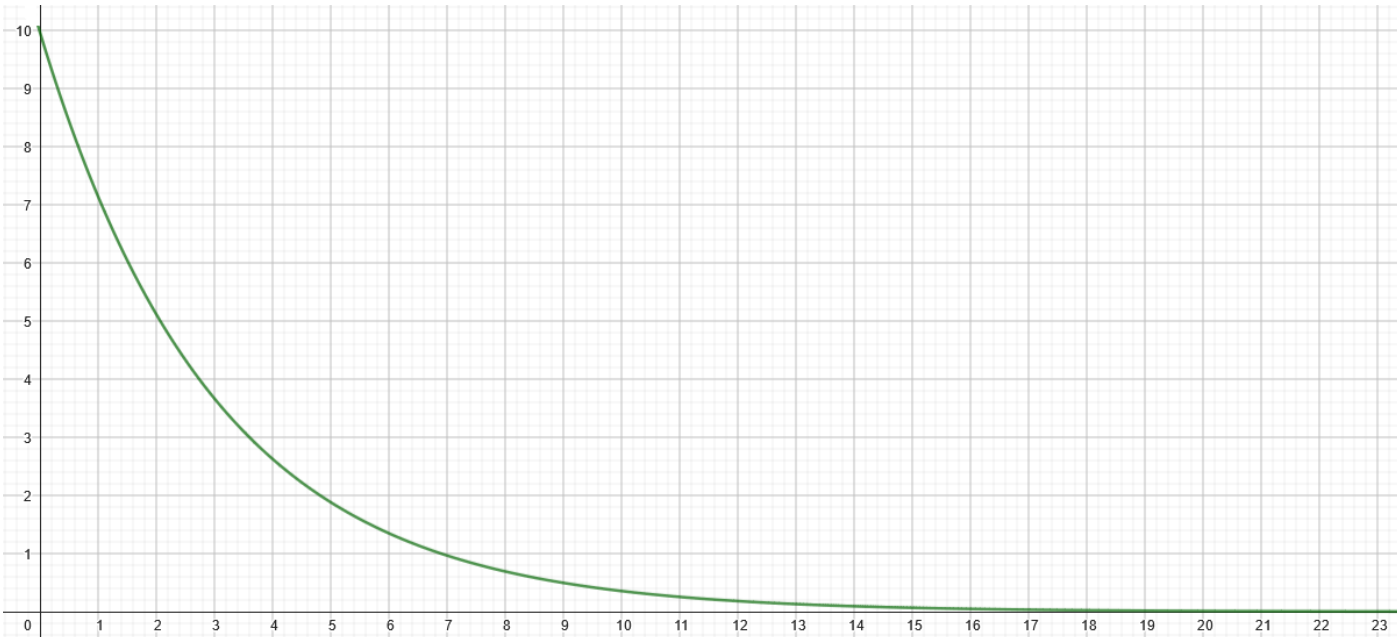

Dans un circuit RC, on a les relation $u(t) = Ri(t)$
et $i(t) = -\frac{dq}{dt} = -q'(t)$avec la charge $q(t) = Cu(t)$.
Ainsi, $u(t) = Ri(t) = R\big(Cu(t)\big)'$,
soit encore l'équation différentielle (E) : $RCu'(t) + u(t) = 0$.
On prend $C = 15 \times 10^{-5}$farads et $R = 2 \times 10^4$ohms.

1. Résoudre l'équation différentielle (E), puis déterminer la fonction $u$solution telle que $u(0) = u_0 = 10$ volts.

Solution générale de l'équation sans second membre (E0) : $ay' + by = 0$ est $ke^{-\frac{b}{a}t}$. donc l'équation sans second membre $RCu'(t) + u(t) = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme$u = ke^{-\frac{1}{RC}t}$
$\Leftrightarrow u = ke^{-\frac{1}{3}t}$
On veut maintenant que cette solution vérifie $u(0) = 10 \Leftrightarrow ke^{-\frac{1}{3}0} = 10 \Leftrightarrow k = 10$
Ainsi $u(t) = 10e^{-\frac{1}{3}t}$

2. Déterminer la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$.

lorsque $t \to +\infty$ on a $-\frac{1}{3}t \to -\infty$ et donc on a $e^{-\frac{1}{3}t} \to 0$ et donc$u(t) \to 0$
3. A partir de quel instant $t_1$la tension u(t) vérifie $u(t) \le \frac{1}{10}u_0$.
$$10e^{-\frac{1}{3}t} \le \frac{1}{10}10 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{3}t} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \ln\left(e^{-\frac{1}{3}t}\right) \le \ln\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{3}t \le \ln\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow t \ge \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow t \ge \frac{-\ln(10)}{-\frac{1}{3}}$$
$\Leftrightarrow t \ge 3\ln(10)$ or $3\ln(10) \approx 6,91$ donc la tension passe endessous de 10% de la tension initiale quand $t$ dépasse 6,91s
4. Tracer la courbe représentative de la fonction u.




**Exercice 14** Incident à l'eau de mer

Un réservoir contient 1000 litres d'eau douce dont la salinité est de 0, 12 g.L$^{-1}$.

A la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans le réservoir à raison de 10 litres par minute.

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la salinité dans le réservoir. On note $s$cette salinité, $s$étant donc une fonction du temps $t$.

On admet que $s$est solution de l'équation différentielle (E) : $s' + 0,01s = 0,39$

1. a) Résoudre l'équation (E$_1$) : $s' + 0,01s = 0$.
   b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).
   c) Résoudre l'équation (E).

2. A l'instant t = 0 où débute l'incident, la salinité de l'eau dans le réservoir était de 0, 12 g.L$^{-1}$.
Montrer que l'on alors $s(t) = 39 - 38,88\, e^{-0,01t}$.

3. Déduire du résultat précédent la salinité de l'eau dans le réservoir au bout de 60 minutes.

4. De combien de temps le service d'intervention dispose-t'il pour colmater l'infiltration si la salinité doit rester inférieure à 3, 9 g.L$^{-1}$ ?

**Exercice 15**

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 6y = 6t$.

1. Vérifier que les fonctions $y_1(t) = A\,e^{3t}$ et $y_2(t) = B\,e^{-2t}$sont des solutions de l'équation sans second membre (E$_0$) : $y'' - y' - 6y = 0$.

Si $y_1(t) = A\,e^{3t}$ alors $y_1'(t) = 3A\,e^{3t}$ et $y_1''(t) = 9A\,e^{3t}$

Ainsi $y''_1 - y_1' - 6y_1 = 9A\,e^{3t} - 3A\,e^{3t} - 6 \times A\,e^{3t} = 0A\,e^{3t} = 0$ CQFD

Si $y_2(t) = Be^{-2t}$ alors $y_2'(t) = -2Be^{-2t}$ et $y_2''(t) = 4Be^{-2t}$

Ainsi $y_2'' - y_2' - 6y_2 = 4Be^{-2t} - (-2Be^{-2t}) - 6Be^{-2t} = 0Be^{-2t} = 0$ CQFD

2. Déterminer les nombres réels a et b tels que $y_p(t) = at + b$ soit une solution de (E).

Si $y_p(t) = at + b$ alors $y_p'(t) = a$ et $y_p''(t) = 0$

$y''_p - y_p' - 6y_p = 6t \Leftrightarrow 0 - a - 6(at + b) = 6t \Leftrightarrow -a - 6at - 6b = 6t$

$\Leftrightarrow -6at + (-a - 6b) = 6t + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6at = 6t \\ -a - 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{-6} \\ -a - 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 1 - 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 1 = 6b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \frac{1}{6} = b \end{cases}$ ainsi $y_p(t) = -t + \frac{1}{6}$

3. En déduire que $y = y_1 + y_2 + y_p$est une solution générale de (E).

La solution générale de (E) est donnée par la combinaison des solutions de l'équation sans second membre et d'une solution particulière , ainsi $y = A\, e^{3t} + B\, e^{-2t} - t + \frac{1}{6}$ est la solution générale de (E)

**Exercice 16**

Vérifier que la fonction $y(t) = e^{2t} cos\,(3t)$ est une solution de l'équation ($E_0$) : $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Si $y(t) = e^{2t} cos\,(3t)$ alors en utilisant $uv \to u'v + uv'$
Avec $= e^{2t}$ , $v = \cos(3t), u' = 2e^{2t}$ et $v' = -3\sin(3t)$ on obtient :
$y'(t) = 2e^{2t}\cos(3t) + e^{2t}\big(-3sin\,(3t)\big) = 2e^{2t}\cos(3t) + -3e^{2t}\sin(3t)$
$= e^{2t}(2\cos(3t) - 3\sin(3t))$
Pour la dérivée seconde j'utilise $uv \to u'v + uv'$
avec $= e^{2t}$ , $v = 2\cos(3t) - 3\sin(3t), u' = 2e^{2t}$
et $v' = 2 \times (-3\sin(3t)) - 3 \times 3\cos(3t) = -3(2\sin(3t) + 3\cos(3t))$
et on obtient :
$y''(t) = 2\,e^{2t}(2\cos(3t) - 3\sin(3t)) + e^{2t}\big(-3(2\sin(3t) + 3\cos(3t))\big)$
$= e^{2t}(4\cos(3t) - 6\sin(3t) - 6\sin(3t) - 9\cos(3t)) = e^{2t}(-5\cos(3t) - 12\sin(3t))$
$y'' - 4y' + 13y = e^{2t}(-5\cos(3t) - 12\sin(3t)) - 4\big(e^{2t}(2\cos(3t) - 3\sin(3t))\big) + 13e^{2t}cos\,(3t)$
$= e^{2t}(-5\cos(3t) - 12\sin(3t) - 8\cos(3t) + 12\sin(3t) + 13cos\,(3t))$
$= e^{2t}(0\cos(3t) + 0\sin(3t)) = 0e^{2t} = 0$
Ainsi $y(t) = e^{2t} cos\,(3t)$ est bien une solution de l'équation ($E_0$)

**Exercice 17**

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

**Exercice 18**

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) :$y'' + 2y' + 2y = 0$.

**Exercice 19**

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$.

**Exercice 20**

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = -3t^2 + 2t$.

1) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
2) Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

**Exercice 21**

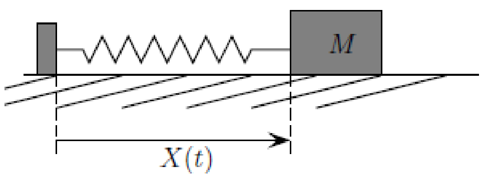
Soit l'équation (E) : $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-t}$.

1) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = Ae^{-t}$.
2) Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

**Exercice 22**

On considère l'équation différentielle : (E) : $y'' - 3y' + 2y = 4$, dans laquelle y est une fonction de la variable $x$.

1. Résoudre l'équation différentielle ($E_0$) sans second membre associée à (E).
2. Déterminer une fonction constante g solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant de plus les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.



**Exercice 23**Objet retenu par un ressort.
On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.
On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps $t$.
On admet que la fonction X est solution de l'équation (E) : $X'' + 100X = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution de l'équation (E) telle que $X(0) = 10^{-1}$et $X'(0) = 0$.

On admet que si l'objet M frotte sur le plan, l'équation différentielle devient $(E') : X'' + X' + 100 = 0$.

3. Résoudre de même$(E')$, avec les mêmes conditions initiales.
4. Représenter graphiquement les solutions de (E) et $(E')$.

**Exercice 24**Oscillations libres et amorties dans un fluide visqueux.
L'écart à sa position initiale d'un objet dans un fluide visqueux est une fonction du temps solution de l'équation différentielle (E) : $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ (ça veut dire $y'' + 2y' + 2y = 0$)

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière de (E) qui s'annule pour t = 0 et dont la dérivée vaut 4 pour $t = 0$.

**Exercice 25**Oscillations forcées et amorties dans un fluide visqueux.
L'objet de l'exercice précédent, toujours dans le même fluide visqueux, est maintenant soumis à une excitation entretenue.
L'écart de l'objet à sa position initiale est alors solution de l'équation différentielle :
$(E): \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dy}{dt} + 2y = 10\,cos(2t)$ (ça veut dire $y'' + 2y' + 2y = 10\,cos(2t)$)

1. Montrer que la solution $g$définie par $g(t) = 2\,sin(2t) - cos(2t)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

**Exercice 26**

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$où $y$est une fonction de la variable $x$définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $y'$la fonction dérivée de y.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle ($E_0$) : $y' + y = 0$.
2. Rechercher une fonction affine solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction $f$solution de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B. Etude de la solution.

On étudie la fonction f trouvée ci-dessus, définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par $f(x) = 2e^{-x} + x - 1$.

1) Calculer la dérivée $f'$de f.
2) Etudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
3) Déterminer la limite $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1)$

On note $(D)$ la droite d'équation $y = x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat précédent, puis tracer $(D)$et l'allure de la courbe représentative de f.

**Exercice 27**Problème d'isolation.
Pour tester la résistance d'une plaque d'isolation phonique \`a la chaleur, on porte sa température à 100 ◦ C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps.
On note $\theta(t)$ la température de la plaque, en dégrée Celsius, à l'instant $t$, en minutes.
La température ambiante est de 19 ◦ C et après 6 minutes la température est redescendue à 82 ◦ C.
On admet que la fonction $\theta$est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,042y = 0,798$.

Partie A.

1) Rechercher une fonction constante solution particulière de (E).
2) Donner alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).
3) D'après l'énoncé, que vaut $\theta(0)$, la température initiale de la plaque.
4) En déduire la solution particulière de (E) donnant la température de la plaque en fonction du temps.
5) Calculer la température de la plaque après 35 minutes.

Partie B.

1) Calculer la dérivée $\theta''$ de $\theta$. En d´eduire le sens de variation de thêta sur $[0;+\infty[$.
2) Calculer la limite de $\theta(t)$lorsque $t$tend vers$+\infty$.
3) Représenter graphiquement la fonction $\theta$.
4) Calculer le temps à partir duquel la température de la plaque est inférieure à 30 $\circ$ C.
5) Vérifier graphiquement ce résultat.