Les matrices

I. Les matrices

Exemple.

Trois ateliers A_1, A_2 et A_3 fabriquent deux types d'appareil P_1 et P_2.

Pour une période donnée, la fabrication est la suivante :

- L'atelier A_1 fabrique 2 appareils de type P_1 et 3 appareils de type P_2.
- L'atelier A_2 fabrique 2 appareils de type P_1 et 4 appareils de type P_2.
- L'atelier A_3 fabrique 4 appareils de type P_1 et 3 appareils de type P_2.

Par facilité, nous représentons cette situation par la matrice suivante $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice A donne la production par type d'appareil et par atelier. C'est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

Définition.

Soit *n* et *p* deux nombres entiers naturels non nuls.

On appelle **matrice** un tableau de nombres réels répartis en *n* lignes et *p* colonnes.

Soit une matrice à *n* lignes et *p* colonnes : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

Exemple.

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $a_{11} = 2 \quad a_{23} = -3 \quad a_{32} = 0 \quad a_{33} = 5$, M est une matrice carrée.

II. Produit par un réel

Les appareils de type P_1 et P_2 fabriqués dans les ateliers A_1, A_2 et A_3 sont vendus 50 000 € pièce. On peut donc construire une nouvelle matrice donnant le chiffre d'affaire potentiel par type d'appareil et par atelier, en milliers d'euros : $\mathrm{B} = 50\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2\times 50 & 2\times 50 & 4\times 50 \\ 3\times 50 & 4\times 50 & 3\times 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 200 \\ 150 & 200 & 150 \end{pmatrix}$.

Définition. Produit d'une matrice par un réel.

Soit $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ une matrice à *n* lignes et *p* colonnes et λ un nombre réel.

Le produit de λ par A est la matrice $\mathrm{C} = \lambda\mathrm{A} = \left(\lambda \times a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ où chaque élément de A est multiplié par λ.

III. Somme de deux matrices

Pour deux périodes différentes, la production par type d'appareil et par atelier est :

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A'} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors le bilan global de la fabrication pour ces deux périodes est représenté par la matrice :

$\mathrm{M} = \mathrm{A} + \mathrm{A'} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Définition. Somme de deux matrices.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ deux matrices à *n* lignes et *p* colonnes.

La somme des matrices A et B est la matrice $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ où l'on ajoute les éléments de A avec ceux de B qui sont sur la même ligne et la même colonne.

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice M = 2A – 3B + C

IV. Produit de deux matrices

Une entreprise fabrique deux types d'appareil X et Y. Pour la fabrication de chacun d'entre eux, elle utilise deux composants C1 et C2.

- Pour fabriquer l'appareil X, il faut 2 composants C_1 et 6 composants C_2.
- Pour fabriquer l'appareil Y, il faut 3 composants C_1 et 5 composants C_2.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ représente les besoins par appareil et par composant.

Pour l'achat des composants C_1 et C_2, l'entreprise a deux fournisseurs F_1 et F_2.

- Le fournisseur F_1 facture 700 € le composant C_1 et 400 € le composant C_2.
- Le fournisseur F_2 facture 500 € le composant C_1 et 600 € le composant C_2.

La matrice $\begin{pmatrix} 700 & 500 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}$ représente les prix par composant et par fournisseur.

Coût avec le fournisseur F_1 :

- Le prix d'un appareil X est 2×700+6×400 = 3800 €.
- Le prix d'un appareil Y est 3×700+5×400 = 4100 €.

Coût avec le fournisseur F_2 :

- Le prix d'un appareil X est 2×500+6×600 = 4600 €.
- Le prix d'un appareil Y est 3×500+5×600 = 4500 €.

On écrit que $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 700 & 500 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3800 & 4600 \\ 4100 & 4500 \end{pmatrix}$, la matrice produit donne le coût prix de revient par appareil selon le fournisseur choisi.

Définition. Produit de deux matrices.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice à *n* lignes et *p* colonnes et $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}}$ deux matrices à *p* lignes et *q* colonnes.

Le produit des matrices A et B est la matrice $C = A \times B = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}}$ à *n* lignes et *q* colonnes telle que :

$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ip}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{matrix}} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times 2 + 1\times 8 + 3\times 9 & -1\times 2 + 8\times 0 + 3\times 4 \\ 7\times 5 - 2\times 1 + 6\times 9 & -1\times 5 - 2\times 0 + 6\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 10 \\ 87 & 19 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.
Calculer le produit suivant : $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}$

Exercice 3.
Calculer le produit suivant : $\begin{pmatrix}5 & 10\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 4.
Calculer le produit suivant : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\2 & -5 & 2\\-3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$

Exercice 5.
Calculer le produit suivant :
$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\3 & 0 & 6\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\-2 & 1 & 7\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 6.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

▶1. Déterminer $A^2 = A \times A$.
▶2. Déterminer A^3.

Exercice 7.
L'inventaire des calculatrices de type A et de type B, en stock dans trois points de vente V_1, V_2 et V_3 de la grande chaîne Tardy, est :

	Type A	Type B
V_1	8	11
V_2	17	5
V_3	12	1

Le prix de vente des calculatrices de type A est 80 € et de type B est 55 €.

Soit $A = \begin{pmatrix}8 & 11\\17 & 5\\12 & 1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}80\\55\end{pmatrix}$

▶1. Calculer A×B.
▶2. Que représente les nombres contenus dans la matrice A×B ?

Exercice 8.
Sur un chantier, trois entreprises cohabitent : P, T et S. Elles ont besoin, par jour, de

	Ciment en tonnes	Sable en m^3	Gravillon en m^3
P	10	5	5
T	8	3	2
S	7	3	2

Ces matériaux sont vendus par trois fournisseurs F_1, F_2 et F_3 aux prix unitaires suivants :

	F_1	F_2	F_3
Ciment	60	55	63
Sable	15	17	13
Gravillon	17	16	15

Soit $M = \begin{pmatrix}10 & 5 & 5\\8 & 3 & 2\\7 & 3 & 2\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}60 & 55 & 63\\15 & 17 & 13\\17 & 16 & 15\end{pmatrix}$

▶1. Calculer M×N.
▶2. Que représente les nombres contenus dans la matrice M×N ?