1.

Valeur de t	Valeur de $f(t)$ arrondie à 10^{-2}	Condition $f(t) \leqslant 21$
0	18	vraie
1	19,07	vraie
2	20,09	vraie
3	21,064	faux

2. $t = 3$.
À partir de 3 secondes, la température dépasse 21°C

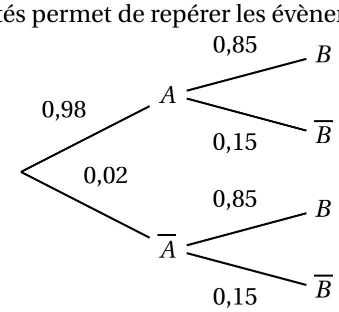
Exercice 2

Partie A

1. A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
L'évènement E_1 signifie que le pneumatique a validé les deux tests, donc $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,98 \times 0,85 = 0,833$.

2. $P(E_2) = P\left(\overline{E_1}\right) = 1 - P(E_1) = 1 - 0,833 = 0,167$.

3. Un arbre pondéré de probabilités permet de repérer les évènements :



Méthode 1 : $P(E_3) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.
$P(E_3) = (1 - 0,98) \times 0,85 + 0,98 \times (1 - 0,85) = 0,164$.
Méthode 2 : On a $P(E_3) = 1 - P(A \cap B) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0,833 - 0,02 \times 0,05 = 0,0167 - 0,003 = 0,164$.

Partie B

1. D'après l'énoncé, $E(T) = 10 = \dfrac{1}{\lambda}$. D'où $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

2. **a.** D'après la formule donnée : $P(T \leqslant 20) = 1 - \mathrm{e}^{-0,1 \times 20} \approx 1 - 0,1353 \approx 0,8646$, soit au millième $0,865$.

b. On doit calculer $P(T > 15) = 1 - P(T \leqslant 15) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,1 \times 15}\right) = \mathrm{e}^{-0,1 \times 15} \approx 0,223$.

3. Pour déterminer cette durée médiane, on peut résoudre l'équation : $1 - \mathrm{e}^{-0,1t} = 0,5$, d'où par croissance de la fonction logarithme, on obtient
$-0,1t = \ln(0,5)$. D'où $t = \dfrac{\ln(0,5)}{-0,1} \approx 6,931$ (h) soit 6 h et $0,931 \times 60 = 55,86$ (min) soit à peu près 6 h 56 min.

Partie C

1. $f = \dfrac{44}{50} = \dfrac{88}{100} = 0,88$.

2. **a.** D'après la formule donnée l'intervalle de confiance est [0,790 ; 0,970].

b. Par définition p appartient à l'intervalle de confiance.

1. $f(0) = (0+1)\,\mathrm{e}^0 + 3 = 4$; la hauteur que peut atteindre le jouet lors de la toute première utilisation est de 4 décimètres.
2. $f(0{,}5) = (2\times 0{,}5+1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5}+3 = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}5}+3 \approx 4{,}21$

   Après 6 mois d'utilisation, soit une demi-année, la hauteur que peut atteindre le jouet est d'environ 4,21 décimètres.
3. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 3$.

   a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 3 = 3$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

   b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ en $+\infty$, d'équation $y = 3$. (Voir annexe)

   c. On peut donc dire qu'à long terme, la hauteur que pourra atteindre le jouet sera de 3 décimètres.
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

   $f'(x) = 2\times\mathrm{e}^{-x} + (2x+1)\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 0 = (2-2x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

   b. On détermine le signe de $f'(x)$ et le tableau des variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	↗	$\approx 4{,}21$	↘	3

5. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $F(x) = (-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} + 3x$ est une primitive de la fonction f.

   L'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est :

   $$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_0^2 = F(2) - F(0) = \left[(-2\times 2-3)\,\mathrm{e}^{-2} + 3\times 2\right] - \left[(-2\times 0-3)\,\mathrm{e}^{0} + 3\times 0\right]$$
   $$= \left(6-7\,\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(-3\right) = 9 - 7\,\mathrm{e}^{-2}.$$

   Une unité d'aire vaut 4 cm^2, donc l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, est de $36 - 28\,\mathrm{e}^{-2}$ soit environ 32,2106, donc 32,21 au centième près. (Voir annexe)

Exercice 2 — 10 points

Dans le cadre du développement d'un de ses prototypes, une marque a demandé à ses équipementiers de développer des technologies et des composants l'aidant à créer un véhicule prototype consommant moins de 1 L au 100 km. Un équipementier a conçu des billes en céramique plus légères pour les roulements du prototype. Ces billes doivent avoir un diamètre de 12,7 mm.

Partie A : Loi normale

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bille en céramique produite par l'équipementier, associe son diamètre exprimé en mm. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 12{,}7$ et d'écart-type σ.

1. On admet que : $P(12{,}6 \leqslant X \leqslant 12{,}8) \approx 0{,}95$.

La valeur de l'écart-type σ est :

0,05	0,1	0,15	0,2

> On sait que si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, on a :
> $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.
> Or $\mu = 12{,}7$ et on sait que $P(12{,}6 \leqslant X \leqslant 12{,}8) \approx 0{,}95$, que l'on peut écrire :
> $P(12{,}7 - 2 \times 0{,}05 \leqslant X \leqslant 12{,}7 + 2 \times 0{,}05) \approx 0{,}95$.
> En comparant les deux approximations, on peut déduire que $\sigma = 0{,}05$.

2. $P(12{,}6 \leqslant X \leqslant 12{,}8) \approx 0{,}95$ donc $P(X < 12{,}6) + P(X > 12{,}8) \approx 1 - 0{,}95$ donc
$P(X < 12{,}6) + P(X > 12{,}8) \approx 0{,}05$

Pour des raisons de symétrie, $P(X < 12{,}6) = P(X > 12{,}8)$ donc la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la production de l'équipementier ait un diamètre strictement supérieur à 12,8 mm est de $\frac{1}{2} \times 0{,}05$ soit 0,03 en arrondissant au centième.

Partie B : Probabilités conditionnelles

L'équipementier propose ses billes en céramique plus légères à deux marques automobiles A et B.
On choisit au hasard une bille en céramique dans la production de l'équipementier.

On admet que :

- La probabilité que la bille soit achetée par la marque A est 0,3.
- La probabilité qu'elle soit achetée par la marque B est 0,7.
- Sachant qu'elle a été achetée par la marque A, la probabilité que la bille soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est 0,75.

On note :

- L'évènement A : « La bille en céramique est achetée par la marque A ».
- L'évènement B : « La bille en céramique est achetée par la marque B ».
- L'évènement R : « la bille en céramique vendue par l'équipementier est utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype ».

1. **a.** Sachant qu'elle a été achetée par la marque A, la probabilité que la bille soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est 0,75, donc $P_A(R) = 0{,}75$.

b. $P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0{,}3 \times 0{,}75 = 0{,}225$

2. On admet que la probabilité qu'une bille en céramique vendue par l'équipementier soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est : $P(R) = 0{,}9$.

a. D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R)$.

On sait que $P(R) = 0{,}9$ et que $P(A \cap R) = 0{,}225$, donc $P(B \cap R) = 0{,}9 - 0{,}225 = 0{,}675$.

b. $P_B(R) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(B)} = \dfrac{0{,}675}{0{,}7} \approx 0{,}96$.

3. La probabilité qu'une bille en céramique ait été achetée par la marque A sachant qu'elle est utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est : $P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}225}{0{,}9} = 0{,}25$.

Partie C : Test d'hypothèse

L'équipementier veut vérifier que les billes en céramique ont un diamètre de 12,7 mm avant de les proposer à une marque et il commande un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 %. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bille céramique produite par l'équipementier, associe son diamètre exprimé en mm. La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 0{,}045$. On prélève au hasard un échantillon de 200 billes en céramique dans la production de l'équipementier. Celle-ci est suffisamment grande pour assimiler ce prélèvement à un tirage successif avec remise de 200 billes.

On rappelle que la variable aléatoire $\overline{Y}$ qui, à tout échantillon prélevé au hasard de n billes en céramique dans la production de l'équipementier, associe la moyenne des diamètres des billes, suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- L'hypothèse nulle du test est : $H_0\ :\ \mu = 12{,}7$;
- l'hypothèse alternative est : $H_1\ :\ \mu \neq 12{,}7$.

Les résultats sont arrondis au millième.

1. **a.** Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de paramètres $\mu = 12{,}7$ et d'écart-type $\overline{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}045}{\sqrt{200}}$ soit 0,003 en arrondissant au millième.

b. La variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de paramètres $\mu = 12{,}7$ et d'écart-type $\overline{\sigma} = 0{,}003$ donc, d'après le cours, on a :
$P(\mu - 2\overline{\sigma} \leqslant \overline{Y} \leqslant \mu + 2\overline{\sigma}) = 0{,}95$ soit $P(12{,}7 - 2 \times 0{,}003 \leqslant \overline{Y} \leqslant 12{,}7 + 2 \times 0{,}003) = 0{,}95$

La valeur du réel h tel que, sous l'hypothèse H_0, on ait : $P(12{,}7 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 12{,}7 + h) = 0{,}95$ est donc $h = 0{,}006$.

Autrement dit : $P\left(\overline{Y} \in \left[12{,}694\ ;\ 12{,}706\right]\right) = 0{,}95$.

2. On peut énoncer la règle de décision :

- si la moyenne des diamètres des billes de l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $\left[12{,}694\ ;\ 12{,}706\right]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
- sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

3. Sur un échantillon de 200 billes en céramique prélevé au hasard dans la production de l'équipementier, on a relevé un diamètre moyen de 12,71 mm.

$12{,}71 \notin \left[12{,}694\ ;\ 12{,}706\right]$ donc l'équipementier peut remettre en cause le diamètre annoncé des billes en céramique, au risque de 5 %.