Nom & Prénom : ………………………………………………………………………………………….. BTS EN 2

Devoir surveillé n° 2

A. Loi binomiale

Une enquête réalisée auprès d'une grande enseigne de garages automobile permet d'admettre que la probabilité qu'une voiture prélevée au hasard parmi les garages de cette enseigne soit réparée et rendue à son propriétaire le jour même de sa réception est 0,7.

On interroge 100 clients au hasard de cette enseigne. Le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler ce sondage à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 clients ainsi interrogés, associe le nombre de clients dont le véhicule est restitué le jour même.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. $E(X) =$ ……………………… ce qui veut dire que …………………………………………………………………………………..

……

3. $\sigma =$………

4. Calculer la probabilité que, sur un échantillon aléatoire de 100 clients, exactement 60 clients aient récupéré leur voiture le jour même. Arrondir à 10^{-3} . $P(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.) \approx$………………………………………………………………………………

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X définie dans la partie A par la loi normale de moyenne 70 et d'écart type 4,6.

On note Y une variable aléatoire de loi normale de moyenne 70 et d'écart type 4,6. En utilisant cette approximation, calculer :

1. la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 80 voitures, sur un échantillon de taille 100, soient restituées à leur propriétaire le jour même, c'est-à-dire $P(Y > 79{,}5) \approx$…………………………………………….
2. la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que le nombre de voitures, sur un échantillon de taille 100, restituées à leur propriétaire le jour même soit compris entre 60 et 80, c'est-à-dire $P(59{,}5 \leq Y \leq 80{,}5) \approx$ … … … … … … … …

C. Intervalle de confiance

Cette grande enseigne de garages automobile organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients. Elle voudrait estimer la proportion inconnue p de clients satisfaits. Pour cela, elle interroge au hasard 100 clients parmi l'ensemble de sa clientèle. Cette clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage avec remise.

Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des clients satisfaits. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$.

On fournit la formule suivante : Intervalle de confiance d'une proportion à 95 % $I_c = \left[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} ; f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\right]$

Pour l'échantillon prélevé, on constate que 87 clients sont satisfaits.

0. Questions préliminaires
   a. quelle est la population ? ……………………………………………..l'échantillon ? ……………………………………
   b. le caractère estimé ? ………….. le caractère mesuré ? …………………………….
   c. qu'entend-t-on par à 95 % , à quoi correspondent les 5% restant ?
   ……
   d. que vaut t dans les conditions de l'énoncé ? Qu'aurait-il valu si on cherchait un intervalle de confiance à 99% ? à 90% ? $t_{90\%} \approx$…………………. $t_{95\%} \approx$…………………. $t_{99\%} \approx$………………….
1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p. $p \approx$ ……………………….
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} .
   $I_c =$ ………
   ………

Correction

partie A

1. L'expérience consiste en la répétition de 100 épreuves identiques qui n'ont que deux issues; la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}7$.
2. L'espérance de X est $E(X) = np = 100 \times 0{,}7 = 70$; cela veut dire que sur un échantillon de 100 clients, il y en a en moyenne 70 dont le véhicule est restitué le jour même.
3. L'écart type de la variable aléatoire X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}7 \times 0{,}3} = \sqrt{21} \approx 4{,}6$.
4. La probabilité que, sur un échantillon aléatoire de 100 clients, exactement 60 clients aient récupéré leur voiture le jour même est :

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \times 0{,}7^{60} \times (1-0{,}7)^{100-60} \approx 0{,}008.$$

Partie B

1. La probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 80 voitures, sur un échantillon de taille 100, soient restituées à leur propriétaire le jour même, est $P(Y \geqslant 79{,}5) \approx 0{,}019$.
2. La probabilité, arrondie à 10^{-3}, que le nombre de voitures, sur un échantillon de taille 100, restituées à leur propriétaire le jour même soit compris entre 60 et 80, est $P(59{,}5 \leqslant Y \leqslant 80{,}5) \approx 0{,}978$.

Partie C

0. Questions préliminaires
   a. quelle est la population ? tous les clients …………l'échantillon ? les 100 clients interrogés
   b. le caractère estimé ? p proportion dans la pop le caractère mesuré ? f (fréquence dans l'échantillon
   c. qu'entend-t-on par à 95 % , à quoi correspondent les 5% restant ?
      On est sur à 95% que si l'échantillon est représentatif alors p sera dans l'intervalle. Il n'y a que 5% de chance qu'il ne le soit pas.
   d. que vaut t dans les conditions de l'énoncé ? Qu'aurait-il valu si on cherchait un intervalle de confiance à 99% ? à 90% ? $t_{90\%} = 1{,}645$…….. $t_{95\%} = 1{,}96$…………….. $t_{99\%} = 2{,}576$

1. Une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p est $f = \frac{87}{100} = 0{,}87$.
2. Un intervalle de confiance centré sur f de p avec le coefficient de confiance 95 % est :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{100}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{100}}\right]$$
$$= \left[0{,}87 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}87(1-0{,}87)}{100}}\ ;\ 0{,}87 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}87(1-0{,}87)}{100}}\right] \approx [0{,}804\ ;\ 0{,}936]$$