Fiche d'Exercices :

Estimations Statistiques

Exercice 1 : Temps de réaction d'une machine

Un responsable qualité souhaite évaluer le temps de réaction moyen d'une machine d'emballage. Il mesure, en secondes, le temps de réaction sur un échantillon aléatoire de $n = 15$ cycles de production.

Temps de réaction (s) 0.8 0.9 1.1 1.0 0.9 1.2 1.0 0.8 1.1 1.0 0.9 1.1 1.0 0.9 1.0

1. Compléter le tableau synthétisant la série statistique

Temps de réaction (s)	0,8	0,9	1	1,1	1,2
effectif					

2. Calculer $\bar{x}$ la **moyenne d'échantillon** et σ l'**écart-type**.
3. En déduire $\hat{\mu}$ l'estimation ponctuelle de la moyenne de la population et de $\hat{\sigma}$ l'écart-type de la population.

Exercice 2 : Temps passé sur les réseaux sociaux

Un institut de sondage étudie la durée hebdomadaire passée sur les réseaux sociaux par les étudiants d'une grande ville. Sur un échantillon aléatoire de n=250 étudiants, les résultats agrégés sont les suivants :

- Somme des durées $\sum_{i=1}^{250} x_i = 3125$ heures
- Somme des carrés des durées $\sum_{i=1}^{250} x_i^2 = 41\ 500$

1. Calculer $\bar{x}$ la **moyenne d'échantillon**.
2. Calculer σ l'**écart-type** et s l'**écart-type corrigé**.
3. Fournir μ une estimation ponctuelle du temps hebdomadaire moyen et σ l'écart-type pour tous les étudiants de la ville.

Exercice 3 : Poids des boîtes de conserve (σ connu)

Une usine de mise en conserve produit des boîtes de haricots verts. L'**écart-type de la population (sigma) est connu** historiquement comme étant 4 grammes.

Un contrôleur prélève un échantillon aléatoire de $n = 50$ boîtes et mesure leur **poids moyen** : $\bar{x} = 412$ grammes.

1. Donner l'intervalle de confiance bilatéral de la moyenne mu du poids des boîtes de conserve au **seuil de confiance de 95%**. (Utiliser la valeur critique $z_{0,025} \approx 1.96$).
2. Quelle est la marge d'erreur maximale pour ce niveau de confiance ?

Exercice 4 : Consommation d'eau (σ inconnu, n grand)

Un organisme de gestion des eaux mesure la consommation moyenne journalière d'eau (en litres) dans un quartier résidentiel.

Sur un échantillon de $n = 100$ foyers, la **consommation moyenne journalière** est de $x_{barre} = 155$ litres, avec un **écart-type d'échantillon corrigé** de $s = 25$ litres.

1. Construire l'intervalle de confiance de la moyenne mu de la consommation journalière d'eau de tous les foyers du quartier, avec un **niveau de confiance de 99%**.
   (Utiliser la valeur critique $z_{0,005} \approx 2.576$).
2. Si l'organisme souhaite que la marge d'erreur ne dépasse pas 5 litres, et en conservant le niveau de confiance de 99%, quelle taille d'échantillon minimale n aurait-il fallu prélever (en utilisant $s = 25$ comme estimateur de sigma) ?

Corrigés

Exercice 1 : Temps de réaction d'une machine

1. Calcul de $\overline{x}$ et s

- **Moyenne $\overline{\boldsymbol{x}}$** $(n = 15)$:
  - Formule : $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{n}$ Calcul : $\sum_{i=1}^{15} x_i$ = 14.7 secondes
  - $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{n} = \frac{14{,}7}{15} \approx 0{,}98$ **secondes**
- **Écart-type** σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{15} x_i^2 - n\,\overline{\boldsymbol{x}}^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{15}(14{,}59 - 15 \times 0{,}98^2)} \approx 0.011$$

2. Estimations ponctuelles

- **Estimation ponctuelle de la moyenne $\hat{\mu}$:** $\hat{\mu} = \overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0.98}$ **secondes**
- **Estimation ponctuelle de l'écart-type $\hat{\sigma}$:** $\hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma = \sqrt{\frac{15}{14}}\ 0{,}11 \approx \boldsymbol{0.1146\ secondes}$

Exercice 2 : Temps passé sur les réseaux sociaux

1. Calcul de la moyenne $\bar{x}$ Calcul : $\bar{x} = \frac{3125}{250} = \mathbf{12.5}$ **heures**

2. Calcul de la variance s^2 et de l'écart-type s corrigés

- **Écart-type** σ :

  Calcul : $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \mathrm{n}\overline{\boldsymbol{x}}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{250}[41500 - 250 \times (12.5^2)]} \approx 3{,}122$
- **Écart-type corrigé s** :
  - $s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma = \sqrt{\frac{250}{249}}\ 0{,}11\ \sqrt{s^2} \approx \mathbf{3.129}$ **heures**

3. Estimations ponctuelles

- **Estimation ponctuelle de la moyenne $\hat{\mu}$:** $\hat{\mu} = \bar{x}$ = **12.5 heures**
- **Estimation ponctuelle de l'écart-type $\hat{\sigma}$:** $\hat{\sigma} = s \approx \mathbf{3.13}$ **heures**

Exercice 3 : Poids des boîtes de conserve (sigma connu)

Données : $\sigma = 4\ g$ (connu), $n = 50$, $\bar{x} = 412\ g$.

Niveau de confiance 95%, donc valeur critique $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{5\%}{2}} = z_{0{,}025} \approx 1{,}96$.

1. Intervalle de confiance $\boldsymbol{IC_{95\%}}$

- $IC = [\bar{x} - E\ ;\ \bar{x} + E]$ avec $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 1{,}96\frac{4}{\sqrt{50}} \approx 1.1088$
- **Calcul de l'intervalle :**
  - $IC_{95\%} = [412 - 1.11\ ;\ 412 + 1.11] \approx [\mathbf{410.89}\ ;\ \mathbf{413.11}]\ \boldsymbol{g}$

2. Marge d'erreur maximale

- La marge d'erreur maximale est la valeur E calculée : **1.11 grammes**

Exercice 4 : Consommation d'eau (sigma inconnu, n grand)

Données : $n = 100$, $\bar{x} = 155\ L$, $s = 25\ L$ (estimé pour sigma).

Niveau de confiance 99%, donc valeur critique $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{1\%}{2}} = z_{0{,}005} \approx 2{,}576$.

1. Intervalle de confiance $\boldsymbol{IC_{99\%}}$

- **Formule générale (sigma inconnu, n grand) :**

  $IC = [\bar{x} - E\ ;\ \bar{x} + E]$ avec $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 2{,}576\frac{25}{\sqrt{100}} \approx 6{,}44$ litres
- **Calcul de l'intervalle :**

  $IC_{99\%} = [155 - 6.44\ ;\ 155 + 6.44] = [\mathbf{148.56}\ ;\ \mathbf{161.44}]$ **litres**

2. Taille d'échantillon minimale n

- **Objectif :** Marge d'erreur $E \leq 5$ litres.
- **Formule utilisée :** $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 2{,}576\frac{25}{\sqrt{n}}$
- **Calcul de Racine(n) puis de n et la conclusion:**
  - $5 = 2{,}576\frac{25}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2{,}576\frac{25}{5} \Leftrightarrow n = (2{,}576 \times 5)^2$ $n \approx 166$ foyers