Les fonctions d'une variable réelle

I Les fonctions de référence

1. Les fonctions affines

Une **fonction affine** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels fixés.
Une fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x) = a$.

Cas $a > 0$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

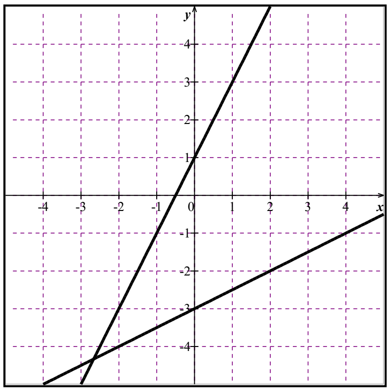
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

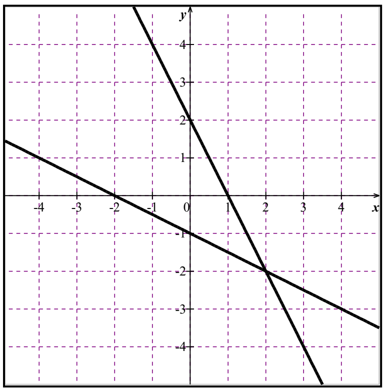
Cas $a < 0$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exemples.





Repasse en rouge f et g en vert h et i

$f(x) = 2x + 1$ $\quad g(x) = -2x + 2$ $\quad h(x) = \frac{1}{2}x - 3$ $\quad i(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

2. fonctions polynôme du second degré

Une **fonction polynôme du second degré** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^2x + bx + c$ où a , b et c sont des réels fixés.
Une fonction polynôme du second degrés (fonction trinôme) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x) = a2x + b$.

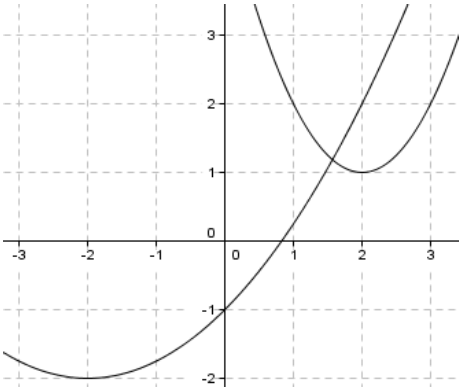
Si a>0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$ $+\infty$

Si a<0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$ $-\infty$

Les fonctions d'une variable réelle



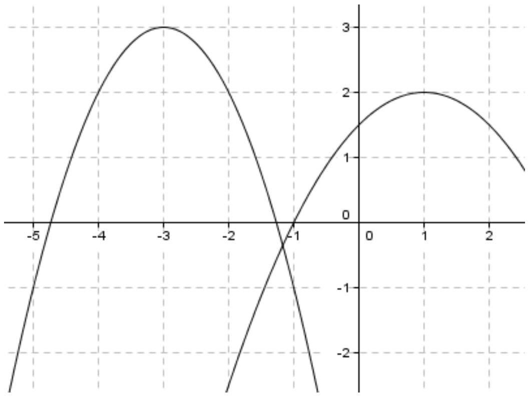
Repasse en rouge f et , en vert h et i

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

$h(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$

$i(x) = -x^2 - 6x - 6$



Comment résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ sera étudié à un autre moment (équations différentielles)

3. La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien notée ln a pour dérivée la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et elle vérifie ln1= 0.

Propriétés du logarithme népérien.

Pour tous réels a et b tels que $a > 0$, $b > 0$ et pour tout entier relatif n.

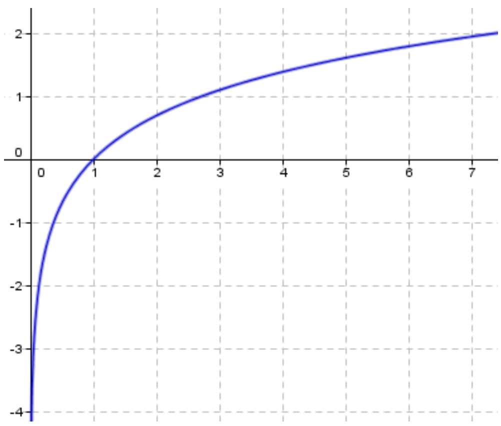
$\ln(a\times b) = \ln a + \ln b$ $\quad \ln\frac{1}{a} = -\ln a$ $\quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ $\quad \ln a^n = n \ln a$ $\quad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Variations du logarithme népérien.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la dérivée de ln est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+	
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

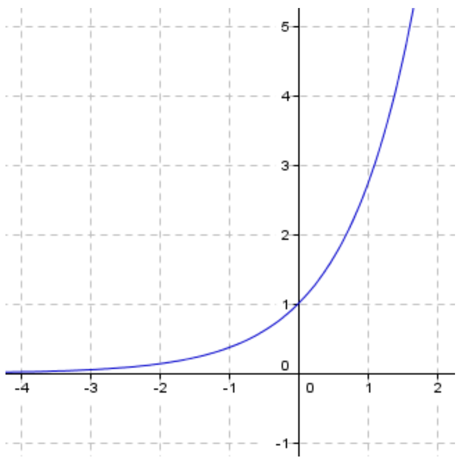


4. La fonction exponentielle

La fonction exponentielle notée exp, est la fonction inverse de la fonction logarithme népérien ça veut dire qu'elle associe à tout nombre réel x le nombre strictement positif unique y tel que $x = \ln y$:

$$\exp \ : \ \mathbb{R} \to]0,+\infty[$$

$$x \ \mapsto \ y = \exp t = e^x \quad \text{et on a ⍰} \quad x = \ln y$$



Propriétés de l'exponentielle.

Pour tous réels a et b tels que $a > 0$, $b > 0$ et pour tout entier relatif n.

$e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $(e^a)^n = e^{na}$

Variations de l'exponentielle.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la dérivée de exp est elle-même.

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

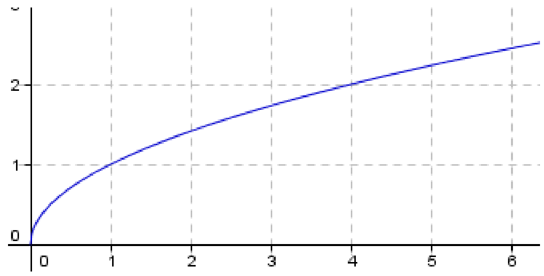
Les fonctions d’une variable réelle

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t) = e^t$		$+$	
$f(t) = e^t$	0	1	$+\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\|$	$f(x) = e^x$ $+$	
$f(x) = \sqrt{x}$	0		$+\infty$

5. La fonction racine

La fonction racine est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et admet comme dérivée sur cet intervalle la fonction $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

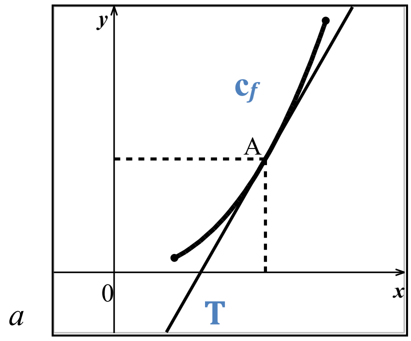


II Dérivation d’une fonction

1. Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Soit a un nombre réel de l’intervalle I, le point A est le point de la courbe c_f d’abscisse a.
On suppose que la courbe c_f admet en A une tangente T non parallèle à l’axe des ordonnées :

On appelle **nombre dérivé** de f en a le **coefficient directeur de la tangente** T à la courbe c_f au point A (a, $f(a)$).
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$ et on dit que f est dérivable en a.



2. dérivées des fonctions usuelles & règles:

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(x) = a$ un nombre réel constant	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln x$	$f'(t) = \frac{1}{x}$

Fonction f	**Dérivée f'**
$u + v$	$u' + v'$
$k\,u$	$k \times u$
$u\,v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Les fonctions d'une variable réelle

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	u^{n}	$\mathrm{n}u^{\mathrm{n}-1}u'$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	e^u	$e^u \times u'$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$		

Pour dériver en utilsant Xcas la fonction $f(x) = 5e^{-3x} + x^2$
On commence par définir f ainsi : f (x):=5exp(-3x)+x^2
Puis on dérive : derive(f(x))

3. Application de la dérivée.

Théorème.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) > 0$ alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur I.
- Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.

Théorème.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si, pour la valeur a de I, la dérivée s'annule en changeant de signe alors la fonction f admet un **maximum local** ou un **minimum local**.

Théorème.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ et k un réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$.

- Si, pour tout x de $]a,b[$, on a $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a,b]$.

III Limites d'une fonction

Dans les tableaux ci-dessous : $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, L$\in \mathbb{R}$

Somme de fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} [u(x) + v(x)]$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$

Produit de fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	L	L $\neq$ 0	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x)$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} [u(x) \times v(x)]$	L×L'	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Inverse d'une fonction.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	L$\neq$0	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{u(x)}$	$\mathbf{\frac{1}{L}}$	$-\infty$	$+\infty$	0^+	0^-

Les fonctions d'une variable réelle

Quotient de fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	L	L≠0	L	0	+∞ ou −∞	+∞ ou −∞
et $\lim\limits_{x \to a} v(x)$	L'≠0	0^+ ou 0^-	+∞ ou −∞	0	+∞ ou −∞	L'
alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{L'}}$	+∞ ou −∞ selon la règle des signes	0	Forme indéterminée		+∞ ou −∞ selon la règle des signes

Exemples.

▶1. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$

▶2. $f(x) = (-x+7)\sqrt{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 7 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+7)\sqrt{x} = -\infty$

▶3. $f(x) = x^2 + 4x$ sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x = -\infty$, la forme est donc indéterminée.

Lorsqu'on a une forme indéterminée, on transforme l'écriture de la fonction pour lever l'indétermination.

$f(x) = x^2\left(1 + \frac{4}{x}\right)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 4x = +\infty$

▶4. $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, la forme est donc indéterminée.

$g(x) = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{3}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2}{1} = 2$

Théorème de Composition des fonctions.

Soit g, f et u trois fonctions telles que $f(x) = g \circ u(x) = g(u(x))$ pour tout x.

Si $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} u(x) = b}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{t \to b} g(t) = c}$ alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(u(x)) = c}$

Exemple.

$f(x) = (\ln x)^2$ sur $]0,+\infty[$. La fonction f est composée de $x \overset{u}{\mapsto} \ln x \overset{g}{\mapsto} (\ln x^2)$ où

$u \ : \ x \mapsto \ln x$ et $g \ : \ t \mapsto t^2$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} t^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(u(x)) = +\infty$

Théorème des gendarmes.

Si $\boldsymbol{u(x) \leq f(x) \leq v(x)}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \mathrm{L}}$ alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}}$.

Théorème.

Si $\boldsymbol{u(x) \leq f(x)}$ et si $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple.

$f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$, pour tout x $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$.

Théorème. Voir formulaire.

- Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$
- Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$

Exemples.

▶1. Sur $]0,+\infty[$ $f(x) = \frac{\ln(0{,}3x)}{5x} = \frac{\ln(0{,}3x)}{0{,}3x} \times \frac{0{,}3}{5}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}3x = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

▶2. $f(x) = xe^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{e^x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$