BTS CIRA1 -Les fonctions

Exercice 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=3x+4$
1) Donner les variations de la fonction.
2) Déterminer les images de 2, -3 et 9
3) Déterminer les antécédents de 7, 0, -3 et 8
4) Faire le tableau de signe de la fonction f

Exercice 2.
Soit$f$ et g les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ telle que :
$f(3)=5$, $f(7)=2$ et $(1)=-4$, $g(4)=8$
Déterminer les coefficients directeurs et ordonnées à l'origine des deux fonctions.

Exercice 3.
Soit$f$, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=-x^2+6x+9$, $g(x)=x^2-x+5$ et $h(x)=8x^2-56x+98$
1) Donner les variations des trois fonctions
2) Déterminer les racines des trois fonctions

Exercice 4.
Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
$\mathrm{A}=\ln 9-\ln 6+\ln 20$,
$\mathrm{B}=\ln 16-7\ln 2+3\ln 4$,
$\mathrm{C}=2\ln\frac{1}{5}+\ln\sqrt{5}$
$\mathrm{D}=\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{9}{10}+\ln 5^3$.

Exercice 5.
Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln x+\frac{1}{x-3}$
1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Dériver f, etudier le signe de f' en déduire les variations de$f$

Exercice 6.
Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
$\mathrm{A}=e^{-1}e^5$, $\mathrm{B}=\frac{\mathrm{e}^{17}\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{11}}$, $\mathrm{C}=\frac{\left(\mathrm{e}^5\right)^9}{e^{-7}}$ et $\mathrm{D}=\frac{1}{\mathrm{e}^5(e^{-3})^2}$.

Exercice 7.
Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
$\mathrm{A}=\ln e^{-1}$, $\mathrm{B}=\ln e^2$, $\mathrm{C}=e^{\ln 2}$ et $\mathrm{D}=e^{-\ln 3}$.

Exercice 8.
Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
$\mathrm{A}=\ln\sqrt{e}$, $\mathrm{B}=\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\mathrm{C}=e^{2\ln 2}$ et $\mathrm{D}=e^{\frac{1}{2}\ln 3}$.

Exercice 9.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $\ln t+\frac{1}{2}=0$ *b*) $e^t-2=0$

Exercice 10.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $2\ln x=\ln 3+\ln(2x+3)$ *b*) $e^{2t}-4e^t+3=0$

Exercice 11.
Etudier le signe de la fonction $f(t)=1+\ln t$ lorsque *t* varie dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Exercice 12.
Etudier le signe de la fonction $f(x)=(-x^2+2x)e^{-x}$ lorsque *x* varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13.
Etudier le signe de la fonction $f(t)=e^{\frac{t}{5}}-1$ lorsque *t* varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14.
Etudier le signe de la fonction $f(x)=3e^{-x}-1$ lorsque *x* varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Dérivées des fonctions
$a(x)=3x+4$ $b(x)=x^7-x^3$
$c(x)=4x^3+2x^2+5x-7$ $d(x)=17\sqrt{x}-51x$
$e(x)=\frac{17}{x}+5-2x$ $f(t)=t^2\sqrt{t}$
$g(t)=(3t+7)(5-4t)(3t)$ $h(l)=(l^2-1)(l^2+1)$
$i(x)=\left(\frac{1}{x}+4\right)(1-x)$ $j(x)=\frac{1}{3x+4}$
$k(\mu)=4x-\frac{7}{\mu^2+1}$ $l(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$
$m(x)=\frac{4x-6}{3x+4}$ $n(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$
$o(n)=n^3-\frac{n+4}{n^2+3n-4}$ $p(t)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$
$r(q)=q-\frac{1}{q+1}$ $s(o)=\frac{o^3-o^2+o}{o+1}$

Exercice 16. Fais les tableaux de variation des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition.
$a(x)=x^2+x-2$ $b(x)=x^3-3x+2$
$c(x)=3x^2-6x+4$ $d(x)=-2x^3+\frac{7}{2}x^2-2x+1$
$e(x)=\frac{x-1}{2-x}$ $f(x)=x-2-\frac{4}{x+1}$
$g(x)=x^4+x^3+7x^2$ $h(x)=2x^4-8x^2+1$
$i(x)=\frac{2x-5}{x-3}$ $j(x)=2x+2+\frac{3}{2x+1}$

Exercice 17.
Etudier le signe de la fonction $f(x)=3e^{-x}-1$ lorsque *x* varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18.
Etudier le signe de la fonction $f(x)=3e^{-x}-1$ lorsque *x* varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19.
Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ lorsque :

a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$

b) $f(x) = -x^3 + 2x + 3$

Exercice 20.

Déterminer les limites en 4 et en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$ définie sur $]4,+\infty[$.

Exercice 21.

Déterminer les limites en -1 et en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{3x^2-5}{x+1}$ définie sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 22.

Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $f(x) = x + \ln x$ définie sur $]0,+\infty[$.

Exercice 23.

Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ définie sur $]0,+\infty[$.

Exercice 24.

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^x + e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25.

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^x - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26.

Soit $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$ définie sur $]1,+\infty[$.

1. Déterminer a, b et c tels que pour tout x de $]1,+\infty[$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
2. En déduire que la courbe représentative c de f admet une asymptote oblique d dont on donnera une équation.
3. Etudier la position de c par rapport à d sur $]1,+\infty[$.

Exercice 27.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = (-3x + 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{3x-7}{-x+3}$ sur $]-\infty,3[$.

b) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29.

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{-3x+2}$ définie sur $]-\infty,\frac{2}{3}[$.

Exercice 30.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

c) $f(t) = 2t - e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

d) $f(t) = te^t$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

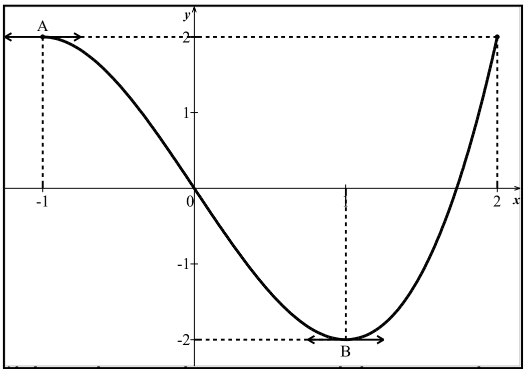
a) $f(x) = (\ln x)^2$ sur $]0,+\infty[$.

b) $f(x) = \ln(2x+3)$ sur $]-\frac{3}{2},+\infty[$.

c) $f(t) = e^{t^2}$ sur $\mathbb{R}$. *d*) $f(t) = \frac{e^t+1}{e^t-1}$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 32.

Soit f la fonction définie sur $[-1;2]$ dont la courbe c est représentée ci-dessous.



1. Utiliser le graphique pour déterminer les nombres $f(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Résoudre graphiquement sur $[-1,2]$ les inéquations suivantes :

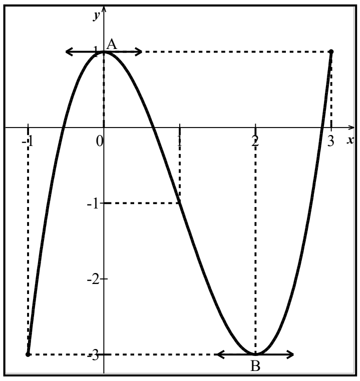
a) $f'(x) > 0$

b) $f'(x) \leq 0$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-1,2]$.
4. On suppose que $f(x) = ax^3 + bx + c$. Calculer les nombres a, b et c.
5. Résoudre, sur $[-1,2]$, $f(x) = 0$.

Exercice 33.

Soit f la fonction définie sur $[-1;3]$ dont la courbe c est représentée ci-dessous.



1. Donner le tableau de variation de f.

2. On suppose que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calculer les nombres a, b, c et d.

Exercice 34.

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{9}{2x+1}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

2 *a*) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-3)]$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

c) Etudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote.

3. Déterminer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et son tableau de variations.

4. Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction f et ses asymptotes.

5. Soit l'équation $f(x) = 10$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

a) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de cette équation.

b) Vérifier ce résultat par le calcul et en déduire la valeur approchée de ces solutions arrondie à 10^{-2}.

Exercice 35.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x} - 2$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

3. Déterminer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$ et son tableau de variations.

4. Soit c la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

a) Déterminer le point d'intersection de la courbe c et de son asymptote parallèles à l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe c.

5. Soit la fonction $\mathrm{F}(x) = \ln x + (\ln x)^2 - 2x$ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

a) Vérifier que la dérivée de F est f.

b) Donner le tableau de variation de F.

Exercice 36.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x) = -x + 2 + \frac{e}{e^x}$. On appelle c la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Déterminer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$ et son tableau de variations.

3. *a*) Démontrer que la droite $\Delta : y = -x+2$ est une asymptote à la courbe c en $+\infty$.

b) Etudier la position de c par rapport à son asymptote.

c) On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à c et Δ. On juge que deux points sont indiscernables sur la figure lorsque la distance qui les sépare est inférieure à 0,5 mm. Pour quels réel x les points M et N sont-ils indiscernables ?

d) Dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$, représenter graphiquement la fonction f et son asymptote.

Exercice 37.

Déterminer les primitives des fonctions :

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(t) = (t-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 38.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(t) = (2t-5)^3$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 39.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x+1)(x^2 + x + 3)$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x + 4 - \frac{2}{x}$ sur $]-\infty,0[$

c) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ sur $]-3,+\infty[$

Exercice 40.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 41.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 6x^2 - \frac{4}{x^2}$ sur $]-\infty,0[$

b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}$ sur $]0,+\infty[$

Exercice 42.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$ sur $]-2,1[$

b) $f(t) = \frac{3t}{(t^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 43.

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{4x-6}$ définie sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$

a) Déterminer trois nombres *a*, *b* et *c* tels que

$f(x) = ax + b + \frac{c}{4x-6}$ pour tout $x \in]-\infty,\frac{3}{2}[$.

b) Déterminer les primitives de la fonction *f* sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$.

Exercice 44.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-3}}$ sur $]3,+\infty[$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 45.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \frac{e^t}{5}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 46.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(t) = 7e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 47.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(t) = -e^t + 2e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 48.

a) Donner la dérivée de $F(t) = t\ln t$ sur $]0,+\infty[$

b) En déduire les primitives de $g(t) = \ln t$.