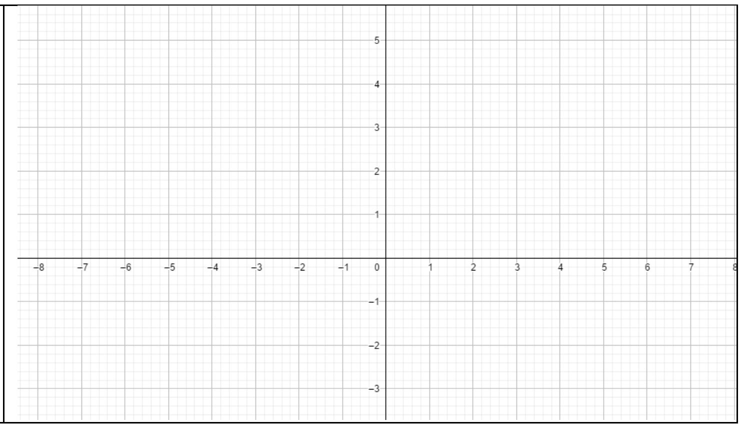
FONCTIONS USUELLES

1/ Fonctions en escalier

Définition : une fonction en escalier est une fonction constante sur des intervalles. On parle de fonctions constantes par morceaux.
Sa représentation graphique est constituée de segments de droites ou demi-droites parallèles à l'axe des abscisses.
ATTENTION, en maths on ne relie pas les parties. Il va y avoir des sauts, c'est normal ! On a besoin qu'un point ait une unique image. Ce qui n'est pas le cas en physique.
Exemple : représenter la fonction définie sur $[-7;+\infty[$par:

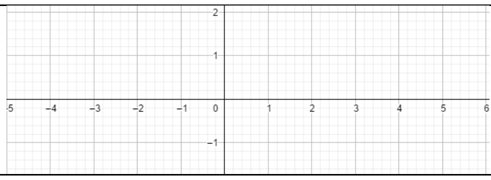
$$f(x)=\begin{cases} 2\ si\ \ -7\leq x\leq -4 \\ -3\ si-4<x\leq 0 \\ 4\ si\ 0<x<2 \\ -1\ si\ x\geq 2 \end{cases}$$



2/Fonction échelon unité

La fonction échelon unité notée U(t) est définie par :

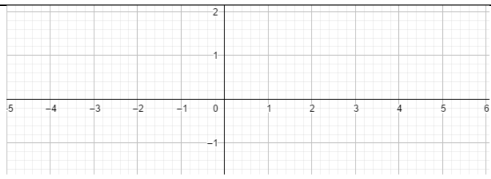
$$\begin{cases} U(t)=0\ si\ x<0 \\ U(t)=1\ si\ x\geq 0 \end{cases}$$



La fonction échelon unité retardée de notée U(t-τ) est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0\ si\ x<\tau \\ U(t)=1\ si\ x\geq \tau \end{cases}$$

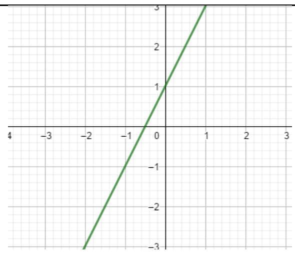
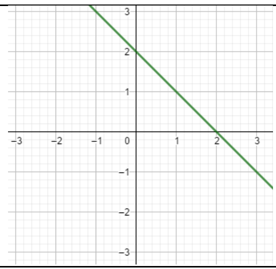
Attention au signe c'est -τ dans la fonction échelon et on fait une translation de + τ $\vec{\imath}$



Application : Tracer la courbe représentative de la fonction définie par : f(t) = 2 U (t) – 3 U (t – 1)

3/Fonction affine

3.1/Fonction affine

$f(x)=ax+b$	$a>0$	$a<0$
Dérivée	$f'(x)=ax$	
Représentation graphique		
Limites	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
Tableau de variation	x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$:	x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$:
Tableau de signe	x : $-\infty$ $-\frac{b}{a}$ $+\infty$ $f(x)$:	x : $-\infty$ $-\frac{b}{a}$ $+\infty$ $f(x)$:

Remarques : si a=0 f est une fonction constante ; on obtient une droite parallèle à l'axe des abscisses.

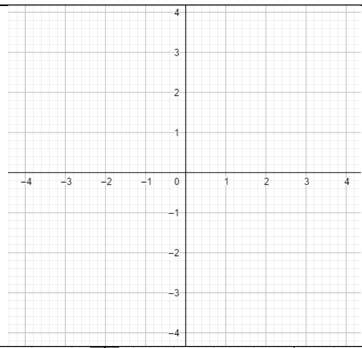
Si b=0 f est une fonction linéaire ; on obtient une droite qui passe par l'origine.

3.2/Droites

Une fonction affine se représente par une droite d'équation $y = ax + b$

Pour représenter une droite il suffit de faire un tableau de valeur avec deux x "bien choisi"
Exemple : Tracer la droite définie par $y = 2x - 3$

x		
$y = 2x - 3$		



Interprétation graphique des paramètres a et b :

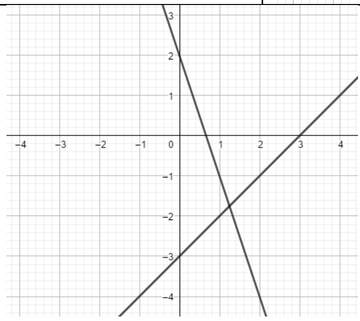
a est le coefficient directeur :

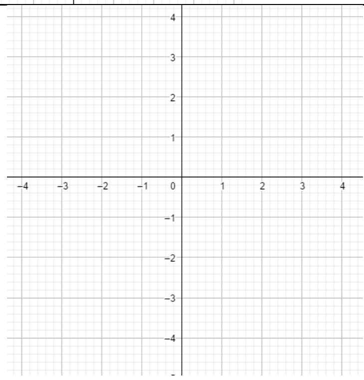
$$a = \frac{montée}{avancée} = \frac{variation\ des\ y}{variation\ des\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

si on connait les cordonnées de deux points A et B appartenant à la droite : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exercice : lire a et b pour les deux droites ci-contre et donner les expressions algébriques des fonctions affines correspondantes

b est l'ordonnée à l'origine : c'est la hauteur où la droite coupe l'axe des ordonnées (en effet : f(0)=b)
Tracer sans faire de tableau de valeur les droites:
$y_1 = -x - 1$ et $y_2 = 0.,5x + 2$

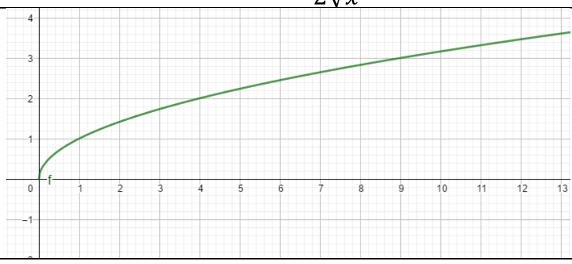




4/Les Fonctions polynômes du second degré

Déjà vu au chapitre précédent

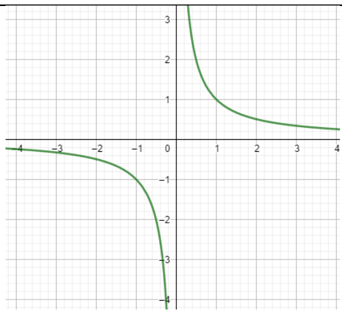
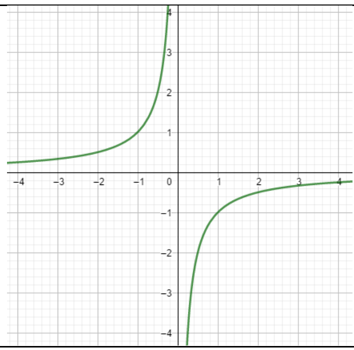
5/La fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$	
Domaine de définition	$D_f = [0; +\infty[$
Dérivée	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Représentation graphique	
Limites	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Tableau de variation	<table><tr><td>x</td><td>0 $\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table>
Tableau de signe	<table><tr><td>x</td><td>0 $\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table>

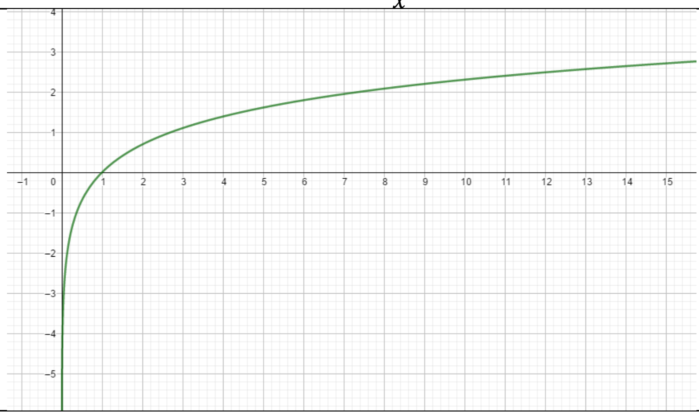
Remarque la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ étant la fonction réciproque de la fonction définie par $f(x) = x^2$, leur courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

6/Les fonctions inverses

$f(x) = \frac{a}{x}$	$a > 0$	$a < 0$
Domaine de définition	$D_f = R^* \quad =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	
Dérivée	$f'(x) = a \times \frac{(-1)}{x^2}$	

<table>
<tr><td>Représentation graphique</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Limites</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$</td></tr>
<tr><td>Interprétation graphique des limites</td><td colspan="2">Limite en 0 : il y a une asymptote verticale d'équation $x=0$
Limite en $+\infty$ et $-\infty$: il y a une asymptote horizontale d'équation $y=0$</td></tr>
<tr><td>Tableau de variation</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Tableau de signe</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

7/Les fonctions ln et log

<table>
<tr><td>$f(x)=\ln(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Domaine de définition</td><td>$D_f=]0;+\infty[$</td></tr>
<tr><td>Dérivée</td><td>$f'(x)=\frac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td></td></tr>
<tr><td>Limites</td><td>$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$</td></tr>
<tr><td>Interprétation graphique des limites</td><td>Limite en 0 : il y a une asymptote verticale d'équation $x=0$</td></tr>
<tr><td>Tableau de variation</td><td><table><tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Tableau de signe</td><td><table><tr><td>x</td><td>0   1 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

Propriétés :

$\ln(1)=0$ $\qquad$ $\ln(e)=1$

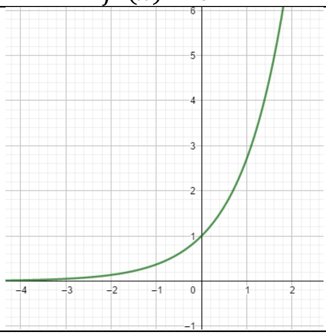
$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$ $\qquad$ $\ln(a^p)=p\ln(a)$ $\qquad$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ $\qquad$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$ $\qquad$ $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

Applications : simplifier : $\ln 6-\ln 2$ $\qquad$ $ln\sqrt{e}$

Exprimer en fonction de $ln2$: $\ln\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\ln 8$ $\qquad$ $\ln 64e$

<u>Définition :</u> Le log décimal, noté **log**, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

8/Fonction exponentielle

$f(x) = e^x$	
Domaine de définition	$D_f = R$
Dérivée	$f'(x) = e^x$
Représentation graphique	
Limites	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Interprétation graphique des limites	Limite en $-\infty$: il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
Tableau de variation	x : $-\infty$ … $+\infty$; $f(x)$:
Tableau de signe	x : $-\infty$ … $+\infty$; $f(x)$:

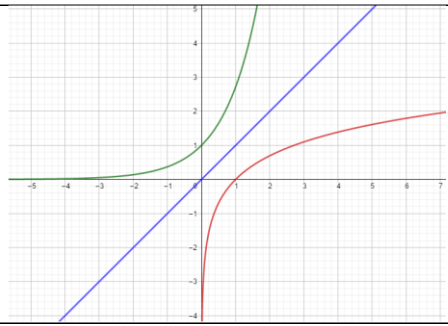
Propriétés :

$e^0 = 1$ $e^1 = e$ $e^{a+b} = e^a e^b$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $(e^a)^b = e^{ab}$

La fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
Les courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

Ainsi, pour x > 0, $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$

De plus,
pour tout x réel, $\ln e^x = x$
pour x >0, $e^{\ln x} = x$



Application : simplifier : $\ln(e^{-2})$ $\ln(\sqrt{e})$ e^{2ln5} $e^{ln4+2ln3}$

$e^{x+3}e^{2x-1}$ $(e^{x-1})^2$ $(e^{n\frac{\pi}{2}})^4$

9/(parenthèse) Comment résoudre une équation du type $a^x = b$?

Exemple 1 : on appelle demi-vie d'un médicament, la durée, en heure, à l'issue de laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

Résoudre dans [0 ; +∞[l'équation $e^{-0.2t} = 0.5$

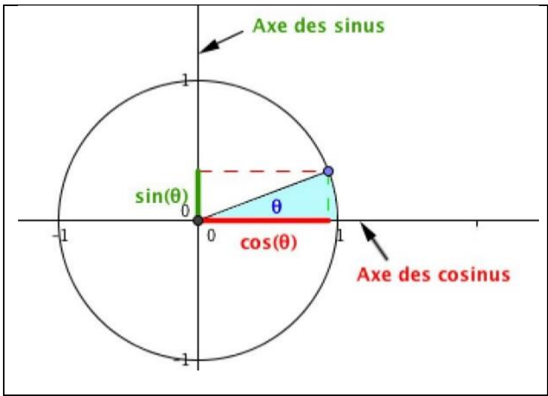
En déduire la demi-vie de cet antibiotique. On arrondira ce résultat à la minute

Exemple 2 : on place un capital, à intérêt composés, à un taux de 3% l'an. Déterminer au bout de combien d'année ce capital aura-t-il doublé.

De manière générale pour résoudre $a^x = b$ on "passe en log"

10/Fonctions circulaires

10.1/ Définition :le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A tout réel t, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ mesure t radians. On pose alors cos θ = abscisse de M et sin θ= ordonnée de M. Ces deux fonctions sont définies sur IR et sont à valeurs dans $[-1,1]$.



	Valeur maximale de	**Valeur minimale de**
Cos(θ)	**1**	**-1**
Sin(θ)	**1**	**-1**

Donc $-1 \leq$ **Cos(θ)** ≤ 1

$-1 \leq$ **Sin(θ)** ≤ 1

10.2/Périodicité **:**

Périodicité de cosinus	Périodicité de sinus
2π	2π

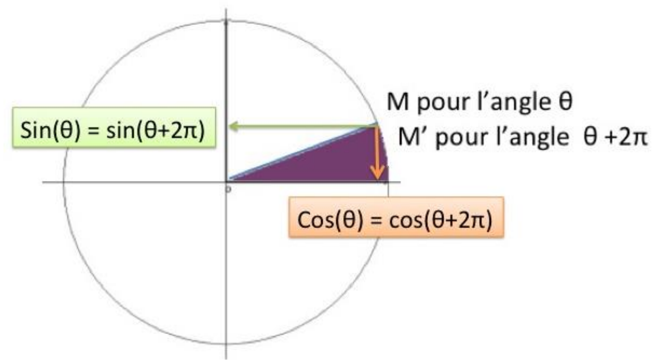
En effet, lorsque l'on fait un tour, on revient au même endroit sur le cercle trigonométrique.

Ainsi, on a : $\text{Cos}(\theta + 2\pi) = \text{Cos}(\theta)$

$\text{Sin}(\theta + 2\pi) = \text{Sin}(\theta)$

On peut donc réduire la courbe de cosinus et sinus sur intervalle de longueur 2π (longueur du motif de base)

Par exemple : [$-\pi$; π] ou [0 ; 2 π]

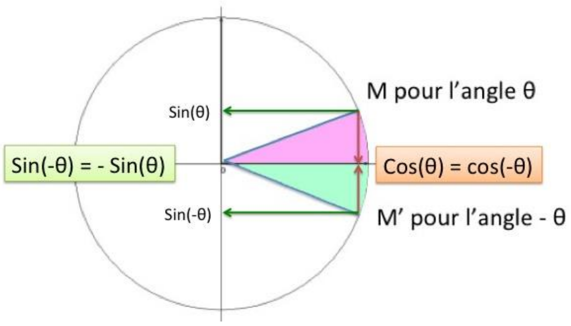


On aura tendance à garder l'intervalle [$-\pi$; π] car il est intéressant pour l'étude de la parité.

De plus, il rappelle aussi **l'intervalle des mesures principales** où l'on connaît les valeurs des cosinus et sinus de ces angles.

10.3/Parité

Parité de cosinus	**Parité de sinus**
Cos(-t) = Cos(t) **Cos** est donc une fonction **paire** Sa courbe est alors **symétrique par rapport à l'axe des abscisses.**	**Sin(-t) = - Sin(t)** **Sin** est donc une fonction **impaire** Sa courbe est alors **symétrique par rapport à 0.**



10.4/ La fonction sinus

$f(x) = \sin x$	
Domaine de définition	$D_f = R$
Dérivée	$f'(x) = \cos x$

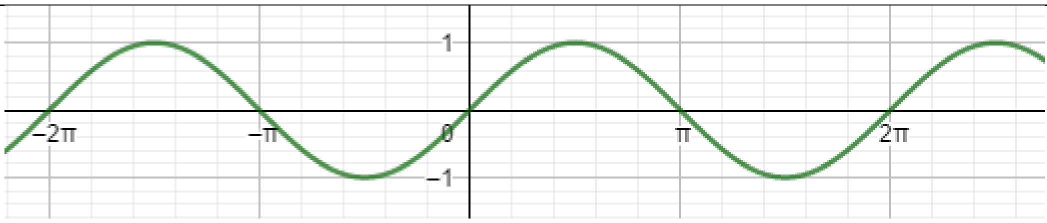
Représentation graphique	
Limites	La fonction sin n'a pas de limite en +∞ et -∞
Tableau de variation	x : 0 $\frac{\pi}{2}$ π $f(x)$:
Tableau de signe	x : 0 π $f(x)$:

Tableau de valeurs de sinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin(x)									

10.5/ La fonction cosinus

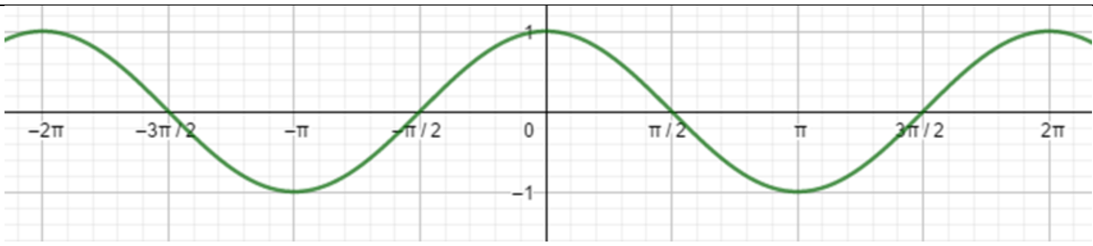
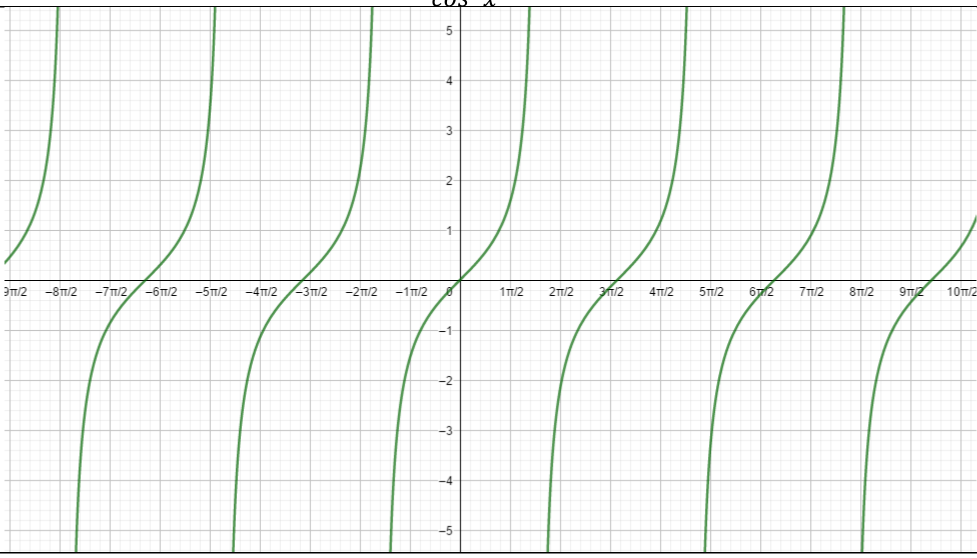
$f(x) = \cos x$	
Domaine de définition	$D_f = R$
Dérivée	$f'(x) = -\sin x$
Représentation graphique	
Limites	La fonction cos n'a pas de limite en +∞ et -∞
Tableau de variation	x : 0 π $f(x)$:
Tableau de signe	x : 0 $\frac{\pi}{2}$ π $f(x)$:

Tableau de valeurs de cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos(x)									

10.6 / La fonction tangente

$f(x) = \tan x = \frac{sinx}{cosx}$	
Domaine de définition	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
Périodicité	La fonction tangente est $\pi\ périodique$: $\tan(x+\pi) = \tan\pi$
Parité	La fonction tangente est impaire : $\tan(-x) = -tanx$ Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine O
Dérivée	$f'(x) = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2x$
Représentation graphique	
Limites	$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$
Tableau de variation	x : $-\frac{\pi}{2}$; 0 ; $+\frac{\pi}{2}$ $f(x)$:
Tableau de signe	x : $-\frac{\pi}{2}$; 0 ; $+\frac{\pi}{2}$ $f(x)$:

Application : Compléter les tableaux ci-dessous (calcul à la main pour tan(a), avec une valeur exacte !)

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
b = Tan a	0		1		-1

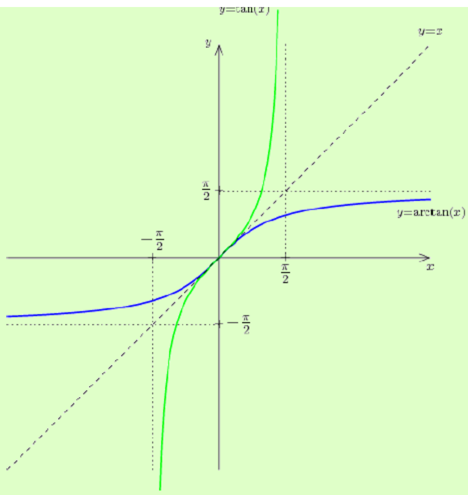
b	0	1			-1
a tel que tan(a) = b	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$

Ainsi, on définit une nouvelle fonction f que l'on va noter **Arctan**, définie par, f(b) = Arctan(b). C'est la fonction **réciproque** de tangente.

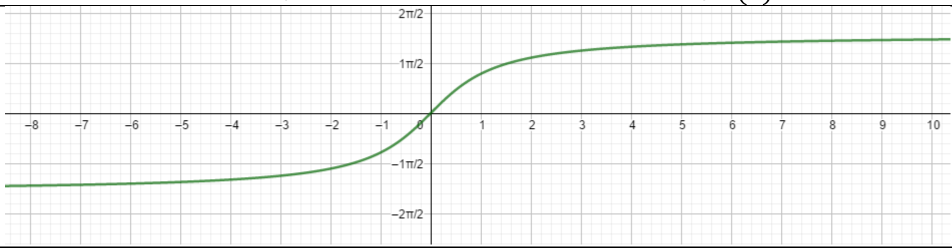
Leurs courbes seront donc **symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.**

ATTENTION, avec les calculatrices, on utilise la touche $\boxed{\tan^{-1}}$ ou $\boxed{\text{Atn}}$

Ainsi, $\begin{cases} \tan(x) = y \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = Arctan(y) \\ y \in \text{IR} \end{cases}$

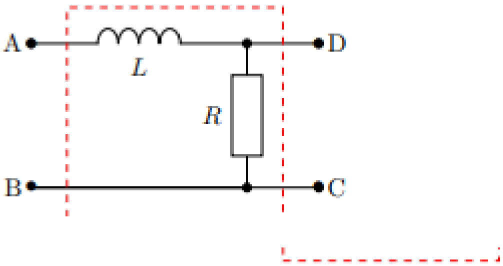


10.7 / La fonction arctan

$f(x) = \arctan x$	
Domaine de définition	$\mathbb{R}$
Parité	La fonction tangente est impaire : $\arctan(-x) = -arctanx$ Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine O
Dérivée	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $f'(u(x)) = \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
Représentation graphique	
Limites	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\frac{\pi}{2}$
Tableau de variation	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table>
Tableau de signe	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table>

10.8 / Exemple d'application en physique

Un filtre nommé F est schématisé ci-contre :



On suppose que la fonction de transfert H du filtre F vérifie, pour tout réel $\omega > 0$: $H(j\omega) = \dfrac{R}{R + j\mathrm{L}\omega}$.

On pose $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

On note φ l'argument principal de $H(j\omega)$

1. **Expression de la fonction φ.**

   Montrer que $\varphi(\omega) = -\arctan \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

2. **Étude de la fonction G**

   (a) Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(\omega_0)$ et $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega)$.

   (c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction φ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.