ETUDES EN LIEN AVEC LES FONCTIONS

1/ Composition

1.1/Calcul d'images / changement de variable / composition.

Exemple : on considère la fonction définie sur IR par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

1.1.1/Calculer f(0) et f(1)

1.1.2/Déterminer l'expression de f(t) et f(u)

1.1.3/Déterminer (en réduisant au maximum) f(2t) , f(-t) et f (s-1)

1.2/Exemples :

1.2.1/ Soit $f(x) = 5x^3 - x$ 1.2.1.1/Calculer f(-x)

1.2.1.2/Existe-t-il une relation entre f(x) et f(-x) ?

1.2.2/ Soit $f(t) = 3\cos(2t)$ 1.2.2.1/Calculer $f(0) et\ f(\frac{\pi}{3})$

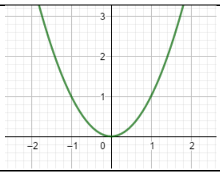
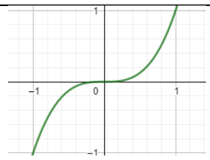
1.2.2.2/Quelle est l'expression de $f(t - \frac{\pi}{4})$?

1.2.3/Soit $H(p) = \frac{1}{(p+2)(1+p)}$ on pose j tel que $j^2=-1$ et $p=j\omega$

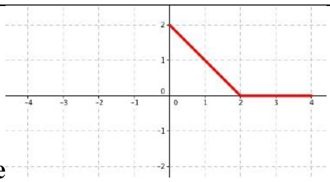
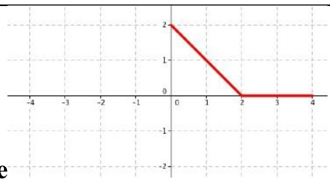
1.2.3.1/ Déterminer $H(j\omega)$

1.2.3.2/ Montrer que $H(j\omega) = \frac{1}{\omega} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{\omega}-\omega\right)+3j}$

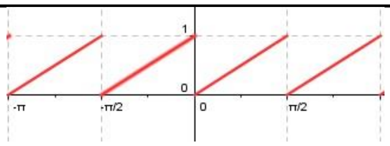
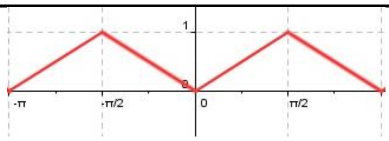
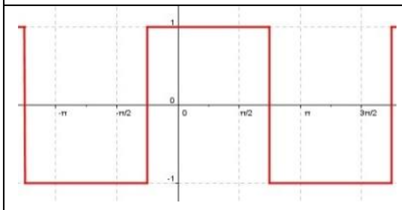
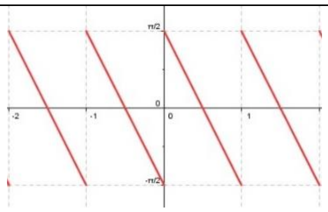
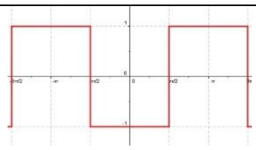
2/Parité

	Fonction paire	Fonction impaire
Exemple		
Définition		
Conséquences graphiques	La courbe représentative de f est symétrique par rapport à	La courbe représentative de f est symétrique par rapport à
Exemple :		

Exercice 1/Compléter le motif de la courbe sachant que la fonction considérée est :

a) **paire** 	b) **impaire** 

2/Parmi les graphes suivants, dire quelles sont les fonctions paires ou impaires.

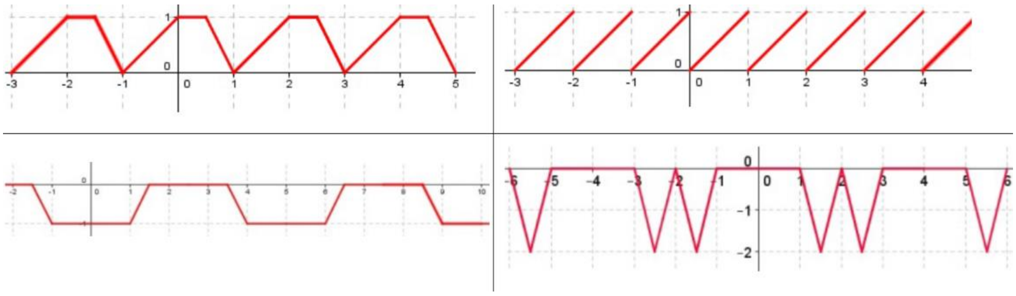
3/Périodicité

Définition : On dit que f est périodique de période T si : f(t+T) = f(t)

On dit aussi que f est T périodique.

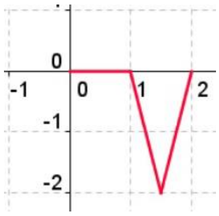
Méthode : pour construire la courbe représentative d'une fonction périodique de période T, on trace le motif de base sur un intervalle de longueur T et on effectue des translations successives.

Exercices : 1/ Déterminer la période de chacune des fonctions ci-dessous :

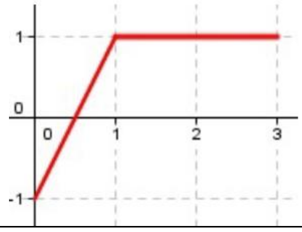


2/ Recopier le motif et compléter la courbe de la fonction périodique donnée sur l'intervalle précisé :

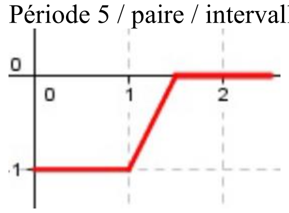
Période 2 / intervalle [-8;8]



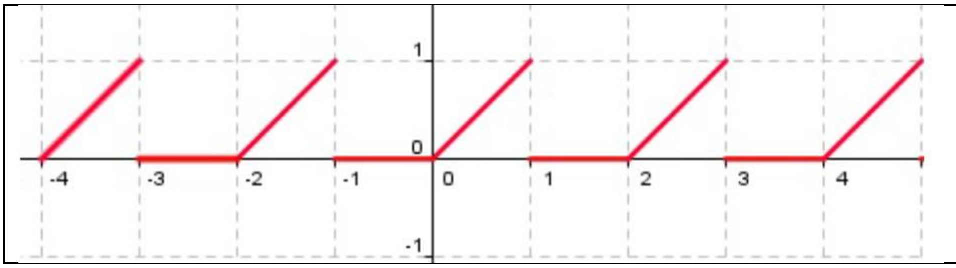
Période 6 / f impaire / intervalle [-9 ;9]



Période 5 / paire / intervalle [-5 ;10]



3/La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-dessous :



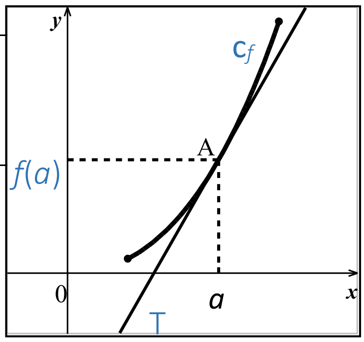
1)Quelle est sa période ?
2)Cette fonction est-elle paire, impaire, ni paire ni impaire ?
3) Quelle est l'expression de f sur [0 ;1] ?
4) Quelle est l'expression de f sur [1 ;2] ?

4/ Tracer la courbe représentative de la fonction f sur [-8 ;8] , sachant que f(t) =2 sur [0 ;1] , f(t)= 3-2t sur [1;2] et que f est périodique de période 2.

4/Fonction dérivée

4.1/ Interpretation géométrique:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Soit a un nombre réel de l'intervalle I, le point A est le point de la courbe C_f d'abscisse a.

On appelle **nombre dérivé** de f en a le **coefficient directeur de la tangente** T à la courbe C_f au point A $(a, f(a))$.
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$



4.2/ Dérivées de fonctions usuelles

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(t) = a$ un nombre réel constant	$f'(t) = 0$
$f(t) = t^2$	$f'(t) = 2t$
$f(t) = t^3$	$f'(t) = 3t^2$
$f(t) = \frac{1}{t}$	$f'(t) = \frac{-1}{t^2}$
$f(t) = \sqrt{t}$	$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$
$f(t) = t^\alpha$	$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$
$f(t) = \ln t$	$f'(t) = \frac{1}{t}$

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(t) = e^t$	$f'(t) = e^t$
$f(t) = \sin t$	$f'(t) = \cos t$
$f(t) = \cos t$	$f'(t) = -\sin t$
$f(t) = \tan\ t$	$f'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$
$f(t) = \text{Arcsin}\ t$	$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$f(t) = \text{Arctan}\ t$	$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$
$f(t) = e^{at}$ où $a \in \text{IR}$	$f'(t) = ae^{at}$

4.3/ Règles de dérivation :

Dérivée d'une somme :	$(u+v)' = u' + v'$	Dérivée d'une fonction composée :
Dérivée du produit par une constante :	$(ku)' = k \times u'$	$(e^u)' = e^u \times u'$
Dérivée d'un produit :	$(uv)' = u'v + uv'$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Dérivée de l'inverse :	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$
Dérivée d'un quotient :	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	$(\sin u)' = \cos u\ u'$ $(\cos u)' = -\sin u\ u'$

4.3/ Déterminer les dérivées des fonctions définies par :

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $f(t) = \ln t + \frac{1}{t}$ $\quad$ $f(t) = 3\cos t - 2\sin t$ $\quad$ $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{x}$

$f(x) = (2x-1)(3x+2)$ $\quad$ $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ $\quad$ $f(t) = \frac{1}{2\cos t}$ $\quad$ $f(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

$f(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$ $\quad$ $f(x) = \ln(4x-5)$ $\quad$ $f(x) = e^{3x}$ $\quad$ $f(t) = e^{t^2}$

$f(t) = \cos 3t$ $\quad$ $f(t) = \sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$ $\quad$ $f(x) = x^3(1 - \sin 2x)$

5/Sens de variation

Pour étudier les sens de variation il faut étudier le signe de la dérivée :

Si f' est positive sur un intervalle [a ; b] alors f est croissante

x	a	b
$f'(x)$		
$f(x)$		

Si f' est négative sur un intervalle [a ; b] alors f est décroissante

x	a	b
$f'(x)$		
$f(x)$		

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle il faut : 1) Déterminer $f'(x)$ $\quad$ 2) Résoudre $f'(x) = 0$

3)Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ $\quad$ 4) Dresser le tableau de variation

Remarque : lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe on a un extremum (maximum ou minimum)

Application : on considère la fonction définie sur [-6 ;9] par : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 108x + 100$

1) Déterminer $f'(x)$ 2) Résoudre $f'(x) = 0$

3) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ 4) Dresser le tableau de variation

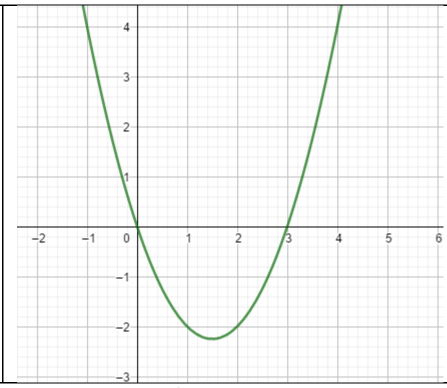
6/Tangentes

On a vu au 5/ que le **nombre dérivé** de *f* en *a* est le **coefficient directeur de la tangente** T à la courbe C_f au point A (a, $f(a)$). Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$

L'équation de la tangente est donc de la forme : $y = f'(a)x + b$
Pour trouver b on écrit que la tangente passe par le point A :
$f(a) = f'(a)a + b$ $\quad b = f(a) - f'(a)a$
L'équation de la tangente est donc $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Propriété : si $f'(a) = 0$ alors la tangente est ………………………………..



Application : on a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x$

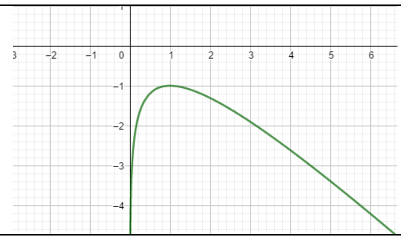
1)Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 et déterminer graphiquement l'équation de cette droite.

2)Déterminer par le calcul l'équation de cette tangente et comparer.

Exercice :
On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction définie par :

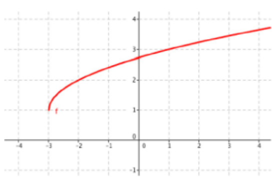
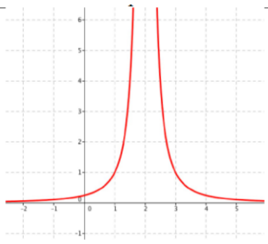
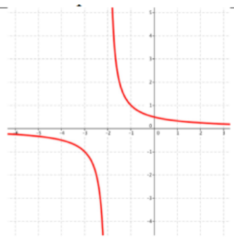
$$f(x) = -x + \ln(x)$$

1)Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1
2)Représenter cette droite sur le graphe.

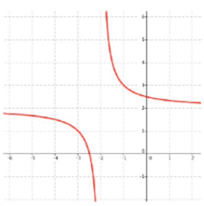
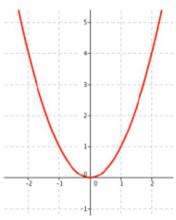
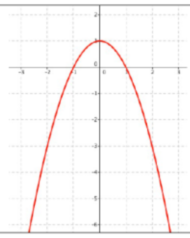


7/Limites

7.1/ Limite en un point : traduire avec la bonne notation la limite à calculer puis donner le résultat correspondant

 Limite en – 3 : ………………………	 Limite en 2 : ………………………	 Limite en - 2 : ……………………… ………………………

7.2/ Limite en $+\infty$ et $-\infty$

			
Limite en $+\infty$			
Limite en $-\infty$			

Avant de continuer, il faut s'assurer que l'on connait par cœur les limites des fonctions de références.

7.3/ Somme (FI veut dire forme indéterminée)

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	L			+∞		-∞
$\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞
Alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=$	L + L'	+∞	-∞	+∞	FI	-∞

Application : déterminer : $\lim_{x\to 0} e^x + x^2$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} + x^3$ $\lim_{x\to -\infty} x + x^3$

7.4/Produit

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L ≠ 0	0	+∞ ou -∞
$\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	+∞ ou – ∞	+∞ ou – ∞	+∞ ou – ∞
Alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=$	L × L'	∞	FI	∞

Application : déterminer :$\lim_{x\to 0}(e^x + 4)(e^x - 2)$ $\lim_{x\to -\infty} (x-1)x^3$ $\lim_{x\to +\infty} (-2x+1)e^x$

7.5/Inverse

Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	L ≠ 0	0^+	0^-	+∞ ou -∞
Alors $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} =$				

Application : déterminer $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+1}$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x}$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x+4}$

7.5/Quotient

Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L ≠ 0	L	0	∞	∞
Et $\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	L' ≠ 0	0^+ ou 0^-	∞	0	L'	∞
Alors $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	FI	∞	FI

Application : déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-1}$ $\lim_{x\to 0+} \frac{x-4}{x}$

7.6/Fonction composées

Déterminer : $\lim_{x\to -\infty} e^{x+3}$ $\lim_{x\to +\infty} \ln(2x+1)$ $\lim_{x\to +\infty} (\frac{2x+2}{2})$ $\lim_{x\to -\infty} (-2x+2)e^{-2x}$ $\lim_{x\to -\infty} (4x-3)^3$

7.6/Fonctions polynôme et fonction rationnelle

Au voisinage de l'infini : une fonction polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

une fonction rationnelle a la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré

Déterminer : $\lim_{x\to +\infty} x^4 + 3x^2 + 2x + 11$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+5}{-3x+12}$

7.7Exercice de synthèse : on considère la fonction définie sur IR par $f(x) = (1+4x)e^{-2x}$

1)Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. 2)Calculer la fonction dérivée(factorise)

3)dresser le tableau de variation de f sur IR. 4/Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0

7/Exercices

1/Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^2 - 2$ 2) $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 3x - 2$ 3) $f(x) = -x^3 + \frac{1}{x}$ 4) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x$

5) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ 6) $f(x) = \frac{x^2-3}{2x+1}$ 7) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 8) $f(x) = xe^x$ 9) $f(x) = (x^2+2)\ln x$

10) $f(x) = (x^2+3)^2$ 11) $f(x) = (x^2+3)^5$ 12) $f(x) = e^{3x+2}$ 13) $f(x) = 3xe^{x^2+1}$

14) $f(x) = \cos(2x+1)$ 15) $f(x) = x \sin(x^2)$ 16) $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$ 17) $f(x) = \frac{2x \ln x}{e^{-5x}+1}$

2/Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement

1) $f(x) = 3x - 125$ 2) $f(x) = -3x^2 + 12$ 3) $f(x) = -3x^2 + 17x - 36$ 4) $f(x) = x^3 - x + 1$

5) $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{x^2-12}$ 6) $f(t) = \frac{t^2+31}{(t+3)(t-3)}$ 7) $f(t) = e^t$ 8) $f(t) = \ln(t)$ 9) $f(t) = \frac{1}{t} + e^{-t}$

10) $f(x) = \frac{150}{1+e^{1-x}}$ 11) $f(x) = xe^x$ 12) $f(x) = (x^2+3x-5)\,e^x$ 13) $f(x) = t\ln(t)$ 14) $f(x) = \frac{\ln(t)}{t}$

3/ Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+2}$ et C sa courbe représentative

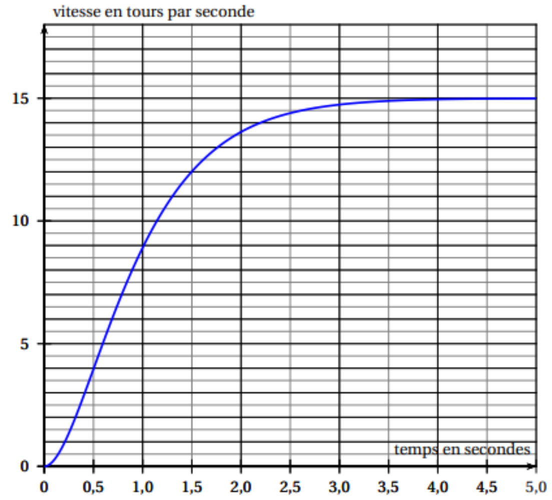
1. Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x-2))$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. Calculer $\lim_{x\to-2} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer la dérivée f' de la f et en déduire le tableau de variation de f.
4. En utilisant tous les résultats précédents (en particulier en traçant les asymptotes), tracer l'allure de $\mathcal{C}$.

4/

1. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$.
   a) Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ de g.
   b) Calculer la dérivée g' de g et en déduire le tableau de variation de g.
   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On note α cette solution.
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
   d) Donner le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. On considère maintenant la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 - 2\frac{\ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
   a) Déterminer la limite en 0 de f et interpréter graphiquement.
   b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.
   c) Calculer la dérivée f' de f et montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le tableau de variation de f.
   d) En utilisant tous les résultats précédents tracer l'allure de $\mathcal{C}$.

Partie A : Étude de la vitesse de rotation du moteur lors de son démarrage

Dans un premier temps, le moteur à courant continu utilisé n'est soumis à aucune charge mécanique. La vitesse de rotation de ce moteur, exprimée en tour par seconde (tour/s), est notée ω. Elle dépend du temps t, exprimé en seconde (s), écoulé depuis le démarrage du moteur.
La courbe ci-dessous représente l'évolution de cette vitesse en fonction du temps.



1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la représentation graphique ci-dessus.
   a. Quelle est la vitesse de rotation du moteur à l'instant $t = 0$?
   b. Quelle est la vitesse de rotation du moteur une seconde après le démarrage?
   c. Vers quelle valeur ω_S semble se stabiliser la vitesse de rotation du moteur?
   d. Avec la précision permise par le graphique, déterminer au bout de combien de temps on atteint 95 % de la vitesse stabilisée. Expliquer.

2. On admet que, dans les conditions de fonctionnement étudiées dans la partie A, la vitesse de rotation du moteur est modélisée par la fonction ω définie pour $t \geqslant 0$ par :

$$\omega(t) = 15 - (30t + 15)e^{-2t}$$

   a. On note ω' la fonction dérivée de ω. Justifier que pour $t \geqslant 0$: $\omega'(t) = 60te^{-2t}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction ω sur $[0\,;+\infty[$.
   c. Calculer $\omega'(0)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

On admet que la fonction donnant la température du conducteur est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = -22e^{-0,05t} + 40.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal. La courbe C est tracée en annexe.

1. a. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,05t} = 0$.
   Déterminer alors la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.
   Tracer cette asymptote sur la représentation graphique donnée en annexe.

2. Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir ci-dessous une expression de la dérivée f' de la fonction f.

1	$f(t)$	$:= -22e^{-0,05t} + 40$
•	$\to f(t)$	$:= -22e^{-\frac{1}{20}t} + 40$
2	Dérivée$(f(t), t)$	
	$\to$	$\frac{11}{10}e^{-\frac{1}{20}t}$

   a. En admettant ce résultat, étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Ce même logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

3	PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$
	$\to 18 + \frac{11}{10}t - \frac{11}{400}t^2$

Les deux questions suivantes sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   a. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est :

$y = 18$	$y = 18 + \frac{11}{10}t$	$y = 18 + \frac{11}{10}t - \frac{11}{400}t^2$

   b. La vitesse de chauffe, exprimée en degré Celsius par seconde, à l'instant initial est égale à $f'(0)$. Cette vitesse vaut :

18	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{400}$

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1 QUESTION B. 1. b.