SUJET D'ENTRAÎNEMENT – 2h

Exercice 1 – Suites et automatisme industriel – /7

Un capteur de pression présente une erreur de mesure qui diminue de 15 % à chaque cycle d'étalonnage.

On note (u_n) l'erreur de mesure (en unités arbitraires) après le n-ième cycle ;

Le comportement du système est modélisé par : $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}85u_n \\ u_0 = 8 \end{cases}$

Questions

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Préciser la nature de la suite (u_n).
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer à partir de quel rang l'erreur devient inférieure à 1.
5. Donner la moyenne des erreurs de mesure sur 24 cycles

Exercice 2 – Fonctions et développements limités – /5

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = ln(1+x)$

On donne le polynôme de Taylor associé à f en 0 à l'ordre 3 : $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Questions

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 et en déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. À l'aide du développement limité donné, déterminer la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de 0.
4. Déterminer une approximation de $\ln(1{,}1)$ (il faut utiliser 1,1 dans le polynôme de Taylor à l'ordre 2)
5. Comparer cette approximation avec la valeur donnée par la calculatrice.

Exercice 3 – Équation différentielle – /5

La tension $y(t)$ aux bornes d'un condensateur vérifie l'équation différentielle :$y' + 2y = 10$

Questions

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière constante.
3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle.
4. Déterminer la solution vérifiant : $y(0) = 0$
5. Déterminer la limite de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 4 – Complexes et trigonométrie – /4

On considère le nombre complexe :$z = -3 - 3i$

Questions

1. Calculer le module de z.
2. Déterminer un argument de z.
3. Écrire z sous forme exponentielle.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rappels :

Dans le polynome de taylor coomme pour le développement limité la première partie de l'expression est de la forme : $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$ …

$y' + ay = 0 \Leftrightarrow y = Ae^{-ax}$

CORRIGÉS DÉTAILLÉS ET BARÈMES

Exercice 1

Q1. $u_1 = 0{,}85 \times 8 = 6{,}8$; $u_2 = 0{,}85 \times 6{,}8 = 5{,}78$; $u_3 = 0{,}85 \times 5{,}78 \approx 4{,}91$ Barème : 1 pt.

Q2. Suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = 8$. Barème : 1 pt.

Q3. $u_n = 8 \times 0{,}85^n$ Barème : 1 pt.

Q4. Résolution : $8 \times 0{,}85^n < 1 \Leftrightarrow 0{,}85^n < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \ln(0{,}85^n) < \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow n\ln(0{,}85) < -\ln(8)$

$\Leftrightarrow n > -\frac{\ln(8)}{\ln(0{,}85)}$ (car on vient de diviser par un négatif) On obtient $-\frac{\ln(8)}{\ln(0{,}85)} \approx 12{,}8$ donc à partir de n = 13.

Barème : 2 pts.

Q5. $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{23} = u_0 \frac{1-q^{24}}{1-q} = 8\frac{1-0{,}85^{24}}{1-0{,}85}$, la moyenne sera donc $\frac{S}{24} = \frac{8}{24} \times \frac{1-0{,}85^{24}}{1-0{,}85}$

Barème : 2 pts.

Exercice 2

Q1. $DL_2(0)$: $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x)$. f(0)=0 et f'(0)=1. Barème : 1,5 pt.

Q2. Tangente : y = x. Barème : 0,5 pt.

Q3. $f(x) - y = f(x) - x \approx -\frac{x^2}{2}$ donc la courbe est sous la tangente. Barème : 1,5 pt.

Q4. $ln(1{,}1) = \ln(1+0{,}1) \approx 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} \approx 0{,}1 - 0{,}005 \approx 0{,}095.$ Barème : 1 pt.

Q5. Comparaison calculatrice cohérente avec $ln(1{,}1) \approx 0{,}095\,310\,179\,8$. Barème : 0,5 pt.

Exercice 3

Q1. Solution homogène : $y = Ce^{-2t}$. Barème : 1 pt.

Q2. Solution particulière :avec $y = k$ on a : $y' + 2y = 10 \Leftrightarrow 0 + 2k = 10 \Leftrightarrow y = 5$. Barème : 1 pt.

Q3. Solution générale : $y = Ce^{-2t} + 5$. Barème : 0,5 pt.

Q4. Avec $y(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^{-2\times 0} + 5 = 0 \Leftrightarrow C + 5 = 0 \Leftrightarrow y(t) = -5e^{-2t} + 5$. Barème : 1,5 pt.

Q5. Limite : 5. Barème : 0,5 pt.

Exercice 4

Q1. $|z| = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. 1 pt.

Q2. Argument : $\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. 1pt

Q3. Forme exponentielle : $z = 3\sqrt{2}\, e^{\frac{i5\pi}{4}}$. 1pt

Q4. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ 1pt