

## Développements Limités

### 1/ Définition

Un développement limité à l'ordre  $n$  d'une fonction  $f$  au voisinage de 0 est une approximation de  $f$  par un polynôme et un reste qui peut être négligé lorsque  $x$  est très proche de 0.

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$  est la partie régulière.

$x^n \varepsilon(x)$  est le reste négligeable

$f_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$  constitue une approximation locale polynomiale de degré  $n$  au voisinage de zéro

### 2/Développement limité de la fonction exponentielle avec geogebra

Développement limité à l'ordre 1

The screenshot shows the GeoGebra interface with the "Calcul formel" tab selected. In the algebra view, it shows:

```

Fonction
• f(x) = 1 + x

```

In the graph view, the curve  $y = e^x$  is plotted, and the tangent line at  $x=0$  (which is  $y = 1 + x$ ) is shown.

Développement limité à l'ordre 5

The screenshot shows the GeoGebra interface with the "Calcul formel" tab selected. In the algebra view, it shows:

```

Fonction
• f(x) = 1/120 x^5 + 1/24 x^4 + 1/6 x^3 + 1/2 x^2 + x + 1

```

In the graph view, the curve  $y = e^x$  is plotted, and the polynomial  $1/120 x^5 + 1/24 x^4 + 1/6 x^3 + 1/2 x^2 + x + 1$  is shown as a green curve that closely approximates the exponential function for  $|x| < 5$ .

Pour voir l'évolution d'un développement limité à l'ordre  $n$  :

Créer un curseur

Dans la barre de saisie saisir

Cliquer sur la flèche et faire varier  $n$

The screenshot shows the GeoGebra interface with a cursor dialog open. The cursor is set to a number input with the value  $n=2$ . The algebra view shows:

```

Fonction
• f(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3!

```

The graph view shows the curve  $y = \sin(x)$  and its Taylor approximation of order 3. A slider labeled  $n=2$  is visible on the right.

Répéter l'opération avec :  $\ln(1 + x)$

$\sin x$

$\cos x$

### 3/Tangente et position de la tangente

Reprendons le développement limité à l'ordre 2 de la fonction exponentielle.

$$\text{On a } e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Si on ne garde que les deux premiers termes on obtient l'équation de la tangente :  $y = 1 + x$

Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction exponentielle et de la tangente au voisinage de zéro on étudie le signe de  $e^x - (1 + x)$

Or:  $e^x - (1 + x) = \frac{1}{2}x^2$  et  $\frac{1}{2}x^2$  est positif : on en déduit que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au dessus de la tangente au voisinage de zéro.

De manière générale :

Si une fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  de partie régulière  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

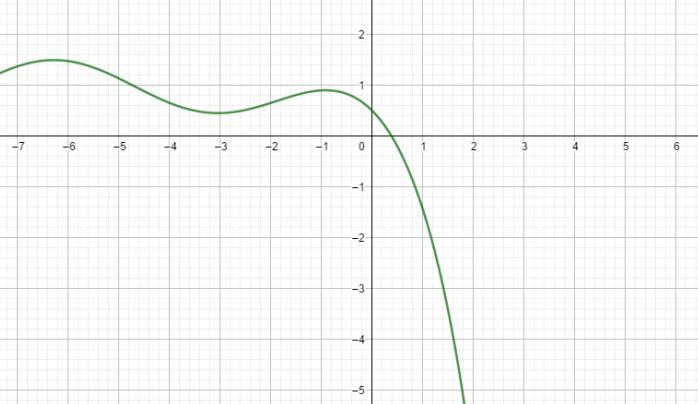
L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 sera :  $y = a_0 + a_1x$

Pour avoir la position relative de la courbe et de la fonction il faudra examiner le signe du terme suivant.

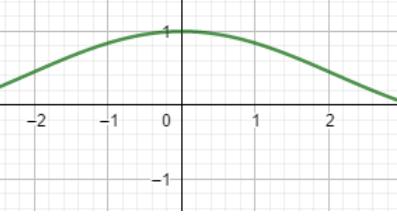
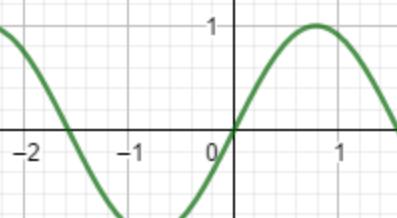
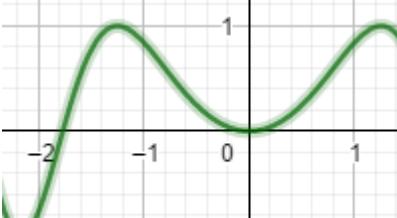
Exemple :

$\text{PolynômeTaylor}(e^{-x}, x, 0, 3)$ $\rightarrow 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$	Geogebra nous a permis d'obtenir la partie régulière du développement limité à l'ordre 3 de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse zéro ainsi que les positions relatives de la courbe et de la tangente
---	---

### 4/Exercices

$\text{PolynômeTaylor}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}, x, 0, 5\right)$ $\rightarrow x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$	4.1/Geogebra nous a permis d'obtenir la partie régulière du développement limité à l'ordre 5 de la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse zéro ainsi que les positions relatives de la courbe et de la tangente		4.2/ Ci-contre est tracé la courbe représentative de la fonction $f$ définie par $f(x) = 1 - e^x + \frac{1}{2}x^2 \cos x$ Un logiciel de calcul formel donne le développement limité à l'ordre 2 de $f$ : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{4}x^3 + x^2\varepsilon(x)$ 4.2.1/En déduire une équation de la tangente à la courbe et la représenter sur le graphique 4.2.2/ Justifier à l'aide du développement limité que la tangente est au-dessus de la courbe.
--	---	---	---

4.3 Associer pour chaque fonction ci-dessous développement limité et représentation graphique

		
$\text{PolynômeTaylor}(\sin(2x), x, 0, 4)$ $\rightarrow 2x - \frac{4}{3}x^3$	$\text{PolynômeTaylor}\left(\frac{\sin(x)}{x}, x, 0, 4\right)$ $\rightarrow 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$	$\text{PolynômeTaylor}(\sin(x^2), x, 0, 6)$ $\rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x^6$