Développements Limités

1/ Définition

Un développement limité à l'ordre n d'une fonction f au voisinage de 0 est une approximation de f par un polynôme et un reste qui peut être négligé lorsque x est très proche de 0.

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + a_nx^n + \ x^n\varepsilon(x) \qquad avec \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

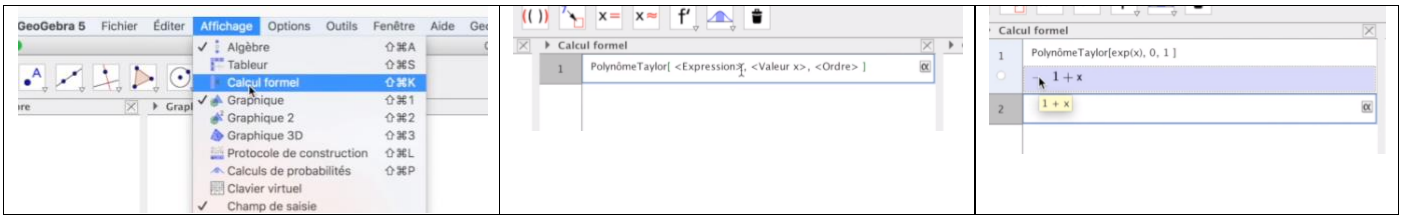
$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + a_nx^n$ est la partie régulière.

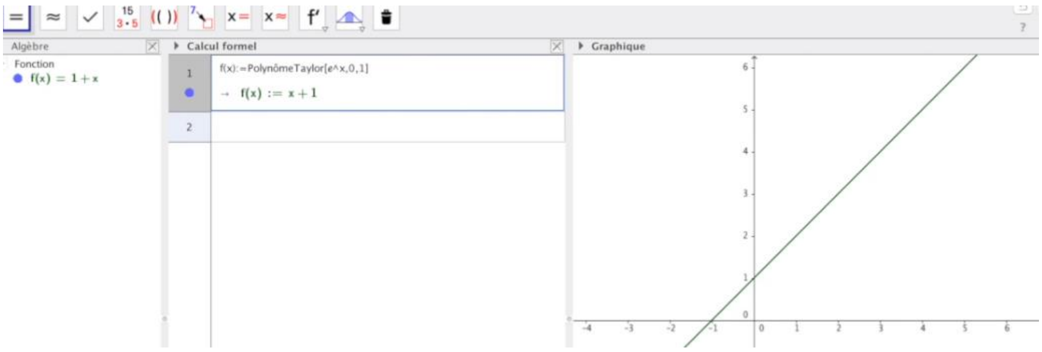
$x^n\varepsilon(x)$ est le reste négligeable

$f_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + a_nx^n$ constitue une approximation locale polynomiale de degré n au voisinage de zéro

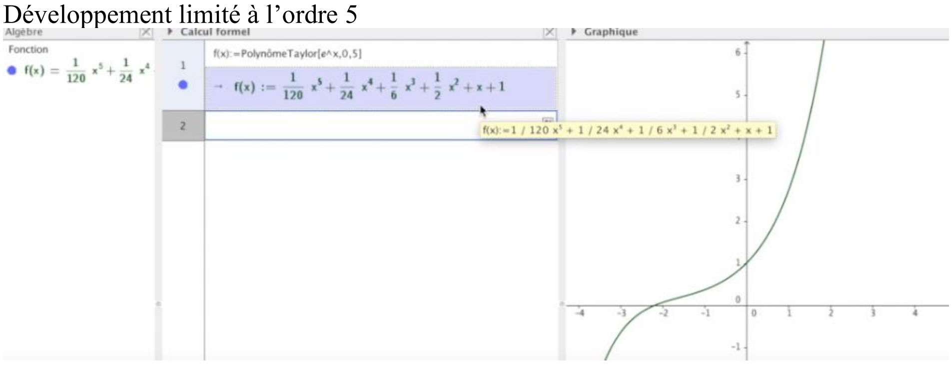
2/Développement limité de la fonction exponentielle avec geogebra

Développement limité à l'ordre 1



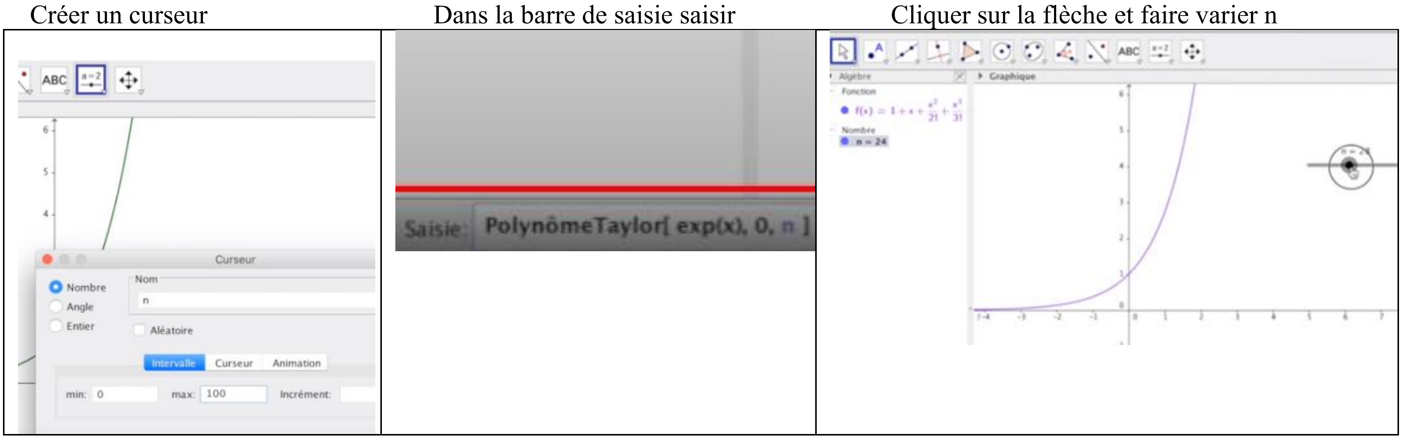


Développement limité à l'ordre 5



Pour voir l'évolution d'un développement limité à l'ordre n :

Créer un curseur Dans la barre de saisie saisir Cliquer sur la flèche et faire varier n



Répéter l'opération avec : $\ln(1 + x)$ $\quad sinx \quad cosx$

3/Tangente et position de la tangente

Reprenons le développement limité à l'ordre 2 de la fonction exponentielle.
On a $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad + \ x^2\varepsilon(x)$
Si on ne garde que les deux premiers termes on obtient l'équation de la tangente : $y = 1 + x$
Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction exponentielle et de la tangente au voisinage de zéro on étudie le signe de $e^x - (1 + x)$
Or: $\quad e^x - (1 + x) = \frac{1}{2}x^2$ et $\frac{1}{2}x^2$ est positif : on en déduit que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au dessus de la tangente au voisinage de zéro.

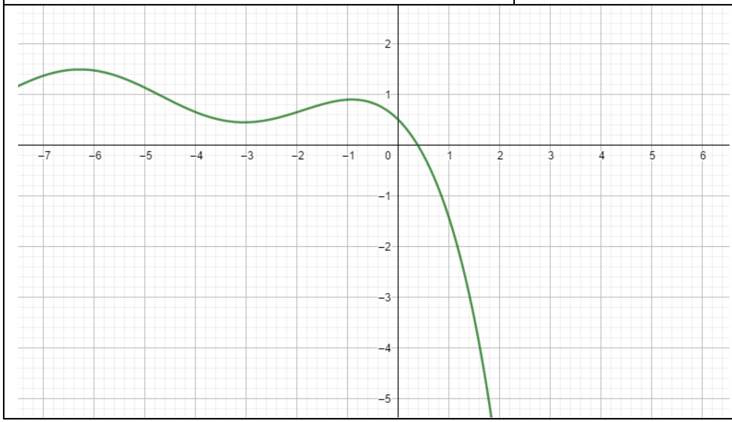
De manière générale :
Si une fonction f admet un développement limité à l'ordre n de partie régulière $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + a_nx^n$
L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 sera : $y = a_0 + a_1x$
Pour avoir la position relative de la courbe et de la fonction il faudra examiner le signe du terme suivant.

Exemple :

PolynômeTaylor$(e^{-x}, x, 0, 3)$ $\rightarrow\ 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$	Geogebra nous a permis d'obtenir la partie régulière du développement limité à l'ordre 3 de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse zéro ainsi que les positions relatives de la courbe et de la tangente

4/Exercices

PolynômeTaylor$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}, x, 0, 5\right)$ $\rightarrow\ x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$	4.1/Geogebra nous a permis d'obtenir la partie régulière du développement limité à l'ordre 5 de la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse zéro ainsi que les positions relatives de la courbe et de la tangente

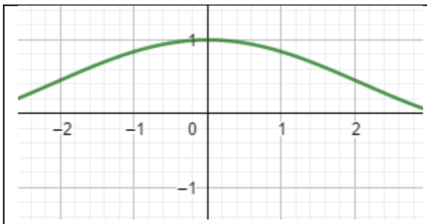


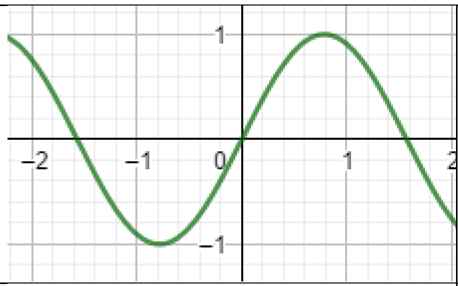
4.2/ Ci-contre est tracé la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 1 - e^x + \frac{1}{2}\cos x$
Un logiciel de calcul formel donne le développement limité à l'ordre 2 de f :

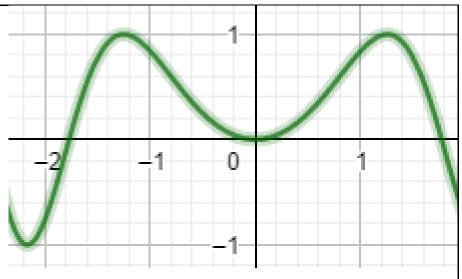
$$f(x) = \frac{1}{2} - x - \frac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

4.2.1/En déduire une équation de la tangente à la courbe et la représenter sur le graphique
4.2.2/ Justifier à l'aide du développement limité que la tangente est au-dessus de la courbe.

4.3 Associer pour chaque fonction ci-dessous développement limité et représentation graphique







PolynômeTaylor$(\sin(2x), x, 0, 4)$ $\rightarrow\ 2x - \frac{4}{3}x^3$	PolynômeTaylor$\left(\frac{\sin(x)}{x}, x, 0, 4\right)$ $\rightarrow\ 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$	PolynômeTaylor$(\sin(x^2), x, 0, 6)$ $\rightarrow\ x^2 - \frac{1}{6}x^6$