

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1/Equations différentielles du premier ordre : le cours

	Le cours	Résoudre l'équation différentielle (ED) $4y' - y = 10$ Telle que $y(0) = 6$
Sans second membre	$ay' + by = 0$	$4y'(x) - y(x) = 0$
1/Solutions générales de l'ED sans second membre	$y_0 = Ke^{-\frac{b}{a}x}$ Où k est une constante réelle quelconque	$a = 4$ et $b = -1$ donc $\frac{b}{a} = \frac{-1}{4}$ Donc les solutions générales de l'ED sans second membre sont : $y(x) = Ke^{-\frac{(-1)}{4}x} = Ke^{\frac{x}{4}}$
Avec second membre	$ay' + by = c$	$4y'(x) - y(x) = 10$
2/On cherche une solution particulière y_p de l'équation avec second membre	On cherche y_p tel que $ay_p' + by_p = c$	On va chercher une fonction constante (indication donnée dans l'énoncé) solution de l'ED Comme y_p est constante $y_p' = 0$ On a donc : $4 \times 0 - y_p = 10$ $y_p = -10$ $y_p = -10$ est donc une solution particulière de l'ED
3/LES solutions générales de l'ED avec second membre	Les solutions générales de l'ED avec second membre résultent de la somme des solutions trouvées au 1/ et au 2/ : $y = y_0 + y_p$	Les solutions générales de l'ED avec second membre sont de la forme: $y(x) = Ke^{\frac{x}{4}} - 10$
4/ LA solution unique de l'ED	Elle est imposée par une condition initiale du type $y(x_0) = y_0$ qui permet de déterminer la valeur de K	On veut trouver LA solution de l'ED telle que $y(0) = 6$ $Ke^{\frac{0}{4}} - 10 = 6$ $K \times 1 - 10 = 6$ $K = 6 + 10 = 16$ LA solution de l'ED vérifiant $y(0) = 6$ est donc : $y(x) = 16e^{\frac{x}{4}} - 10$

2/ Equations différentielles du premier ordre : les exos

2.1/ On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $5y' - 6y = 6$ sur IR où y est une fonction de la variable x, dérivable de dérivée y' .

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire (E₀) : $5y' - 6y = 0$
2. Trouver la fonction constante f, solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur IR
4. Déterminer la solution de (E) tel que $y(0) = 2$

2.2/ On considère l'équation différentielle (E) du premier ordre : $2 \frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) = 9t - 12$ où x est une fonction de la variable t, dérivable sur IR.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2 \frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) = 0$
2. Déterminer 2 réels A et B tel que la solution particulière $f(t) = At + B$ soit solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions générales de (E).

2.3/ On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $y' - y = -\frac{e^x}{x^2}$ sur \mathbb{R}^{+*} où y est une fonction de la variable x, dérivable de dérivée y' .

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire sans second membre
2. Vérifier que la fonction définie par : $g(x) = \frac{e^x}{x}$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur \mathbb{R}^{+*}

Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. On note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant t , exprimé en seconde, avec t variant dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier l'évolution de la température du conducteur en fonction du temps.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

À l'instant $t = 0$ de la mise sous tension, la température du conducteur est celle du milieu ambiant, c'est-à-dire 18 degrés Celsius. Ainsi, on a $f(0) = 18$.

Dans les conditions de l'expérience, la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,05y = 2,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. a. Résoudre l'équation (E_0) : $y' + 0,05y = 0$.

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$

- b. Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = 40$ est une solution de l'équation différentielle (E).

- c. En déduire les solutions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).

2. On rappelle que la température initiale du conducteur est 18° Celsius.

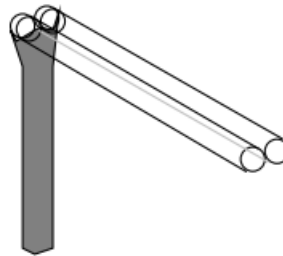
Ainsi, la fonction f exprimant la température du conducteur est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 18$.

Déterminer alors une expression de la fonction f .

1/

Plusieurs projets de train à très haute vitesse et à propulsion électromagnétique sont en préparation, à l'image de l'Hyperloop.

Les wagons ont une forme cylindrique et sont propulsés dans un tube à basse pression afin de réduire les frottements. Les ingénieurs ont fixé comme objectif impératif pour le départ de chaque wagon d'atteindre en moins de 2 minutes une vitesse instantanée de 400 km.h⁻¹.



On note $f(t)$ la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t en minute. On suppose que f est une fonction de la variable t définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 3]$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f afin de vérifier les caractéristiques du départ.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

En appliquant les contraintes physiques et technologiques du projet, de premiers résultats conduisent à l'équation différentielle (E) :

$$y' - 0,2y = 3t,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y .

1. Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 0,2y = 0.$$

On fournit les formules suivantes :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = ke^{-at}$

2. Vérifier que la fonction g , définie sur $[0; 3]$ par $g(t) = -15t - 75$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Au temps $t = 0$, le wagon est au point de départ. Déterminer la fonction f solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

2/

/

	Le cours	Résoudre l'équation différentielle (ED) $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$ Telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$
Sans second membre	$ay'' + by' + cy = 0$	$y'' - 3y' + 2y = 0$
1/Solutions générales de l'ED sans second membre	<p>L'équation caractéristique associée est: $ar^2 + br + c = 0$ et Δ son discriminant.</p> <p>- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 réelles et distinctes. La solution générale de l'ED est alors : $f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où λ et μ sont deux constantes.</p> <p>- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double r réelle. La solution générale de l'ED est alors : $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où λ et μ sont deux constantes.</p> <p>- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$. La solution générale de l'ED est alors ! $f(x) = (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))e^{\alpha x}$ où λ et μ sont deux constantes.</p>	<p>Son équation caractéristique est :</p> $r^2 - 3r + 2 = 0$ $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 9 - 8 = 1,$ <p>il y a deux racines $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$</p> <p>Les solutions sont $y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$ où λ et μ sont deux constantes</p>
Avec second membre	$ay'' + by' + cy = d(x)$	$y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$
2/On cherche une solution particulière y_p de l'équation avec second membre	<p>On cherche y_p tel que :</p> $ay_p'' + by_p' + cy_p = d(x)$	<p>On va déterminer a, b et c tels que la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur soit solution particulière de l'ED (cette indication doit être fournie dans l'énoncé).</p> $g(x) = ax^2 + bx + c,$ $g'(x) = 2ax + b$ $g''(x) = 2a$ <p>donc $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x)$ $= 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c)$ $= 2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c$ $= 8x^2 - 24x,$ donc $a = 4, b = 0$ et $c = -4$ donc $g(x) = 4x^2 - 4$ est une solution particulière de (E).</p>
3/LES solutions générales de l'ED avec second membre	<p>Les solutions générales de l'ED avec second membre résultent de la somme des solutions trouvées au 1/ et au 2/ :</p> $y = y_0 + y_p$	<p>Les solutions générales de l'ED avec second membre sont de la forme:</p> $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 4x^2 - 4$
4/ LA solution unique de l'ED	<p>Elle est imposée par deux conditions initiales du type $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y'_0$ qui permettent de déterminer la valeur de λ et μ</p>	<p>On veut trouver LA solution de l'ED telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=0$</p> $y(0) = 0 = \lambda + \mu - 4,$ $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 4x^2 - 4 \quad \text{donc} \quad y'(x) = \lambda e^x + 2\mu e^{2x} + 8x$ $y'(0) = 0 = \lambda + 2\mu$ $\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 - \mu \\ 4 - \mu + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 - \mu \\ 4 + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 8 \\ \mu = -4 \end{cases}$ <p>La solution vérifiant la condition initiale est $f(x) = 8e^x - 4e^{2x} + 4x^2 - 4$</p>

5/ Equations différentielles du second ordre : les exos

5.1/Résoudre l'équation différentielle : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 4e^{-x}$ sachant que $y(0)=1$ et $y'(0)=1$

(On vérifiera que $f(x) = 2x^2e^{-x}$ est une solution particulière)

5.2/On considère x la fonction définie sur \mathbb{R} , de la variable t vérifiant l'équation différentielle : $x''(t) + 4x(t) = -6\sin(t)$

5.2.1/Résoudre l'équation différentielle : $x''(t) + 4x(t) = 0$

5.2.2/Vérifier que $g(t) = -2 \sin(t)$ est une solution particulière de l'ED avec second membre.

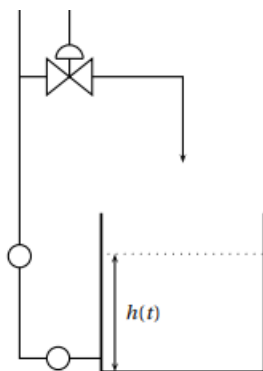
5.2.3/En déduire les solutions de l'ED.

5.2.4/ Déterminer la fonction x solution de l'ED vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$

6/ Equations différentielles du second ordre : les exos type BTS

Exercice I

Dans un régulateur de niveau, La hauteur de liquide varie en fonction du temps. On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) atteinte par le liquide à l'instant t (en heure).
On suppose que h est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

Une étude mécanique montre que la fonction h est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad 10y'' + 3y' + 0,2y = 1,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $10r^2 + 3r + 0,2 = 0$.
- b. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$10y'' + 3y' + 0,2y = 0.$$

On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équations différentielle $ay'' + by' + cy = 0.$	Si $\Delta > 0$: $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, où r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$: $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$, où r est la racine double de l'équation caractéristique.
Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ .	Si $\Delta < 0$: $y(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$, où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

2. Vérifier que la fonction g , définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 5$, est une solution de l'équation différentielle (E).
 3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Les conditions initiales du système mécanique conduisent à poser $h(0) = 8$ et $h'(0) = 0$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de la fonction h .

▷ Calcul formel	
1	RésolEquaDiff[10y'' + 3y' + 0,2y = 1, y, t, (0,8), (0,0)] → $y = 6e^{-\frac{t}{10}} - 3e^{-\frac{t}{5}} + 5$

Quelle est la hauteur du liquide au bout de deux heures? Arrondir au dixième.

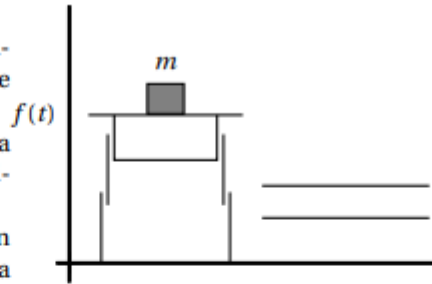
Exercice2

Sur une chaîne de montage, une pièce de 10 kg est située sur un plateau.

On note $f(t)$ la cote (en mètres) du plateau à l'instant t (en secondes), calculée par rapport au sol.

On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.

L'objectif de l'exercice est d'étudier f afin de réaliser correctement le transfert de la pièce sur un tapis roulant.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 5y' + 4y = 10,$$

où y est une fonction de la variable x , définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- b. En déduire les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E₀) :

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{r t}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique.
Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ .	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

2. Un logiciel de calcul formel résout ci-dessous l'équation différentielle (E).
La ligne d'entrée (%i1) est la ligne de commande de la résolution de l'équation différentielle (E).
La ligne notée (%o1) est la ligne de sortie.
Ce logiciel note $\%e^{-t}$ la quantité e^{-t} et $\%k1$ et $\%k2$ deux constantes réelles k_1 et k_2 .

```
(%i1) ode2 ('diff(y, t, 2) + 5 * ' diff(y, t) + 4 * y = 10, y, t);
(%o1) y = %k1 * %e^{-t} + %k2 %e^{-4t} + 5/2
```

L'étude du système mécanique montre que f est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 5$ et $f'(0) = -1$.

En utilisant le résultat du logiciel, qu'on ne demande pas de démontrer, déterminer une expression de $f(t)$ en fonction de t .

CORRECTION

5.1/Résoudre l'équation différentielle : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 4e^{-x}$ sachant que $y(0)=1$ et $y'(0)=1$

(On vérifiera que $f(x) = 2x^2e^{-x}$ est une solution particulière)

Première étape : sans second membre

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

$$a=1 \quad b=2 \quad c=1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Une racine double $r = -2/2a = -2/2 \cdot 1 = -1$

Les solutions de l'ed sans second membre : $y_0 = (\lambda t + \mu)e^{-t}$

Deuxième étape : la solution particulière

On nous propose $f(x) = 2x^2e^{-x}$

Il faut déterminer f' et f'' remplacer et vérifier que l'on trouve $4 \exp(-x)$

$$f'(x) = 2 \times 2x \times e^{-x} + 2x^2 \times (-e^{-x})$$

$$= (4x - 2x^2)e^{-x}$$

$$u = 4x - 2x^2 \quad u' = 4 - 4x$$

$$v = \exp(-x) \quad v' = -\exp(-x)$$

$$u'v + uv' = (4 - 4x)\exp(-x) + (4x - 2x^2)(-\exp(-x))$$

$$f''(x) = (4 - 8x + 2x^2)e^{-x}$$

On remplace dans l'équation :

$$\begin{aligned} f'' + 2f' + f &= (4 - 8x + 2x^2)e^{-x} + 2((4x - 2x^2)e^{-x}) + 2x^2e^{-x} \\ &= (2x^2 - 2 \times 2x^2 + 2x^2 - 8x + 2 \times 4x + 4)e^{-x} \\ &= 4e^{-x} \end{aligned}$$

On trouve bien $4\exp(-x)$

On en déduit que $4\exp(-x)$ est bien une solution particulière de l'ed

Etape 3 : « les solutions »

Elles sont de la forme $y = y_0 + y_p$

$$\text{Donc } y = (\lambda x + \mu)e^{-x} + 2x^2e^{-x} = (\lambda x + \mu + 2x^2)e^{-x}$$

Etape 4 : on trouve LA solution satisfaisant aux conditions initiales :

$$y(0) = 1 \text{ donc } \mu = 1$$

$$y'(0) = 1 \quad y'(x) = (\lambda + 2 \times 2x)e^{-x} + (\lambda x + \mu + 2x^2)(-e^{-x}) = (\lambda + 4x - \lambda x - 1 - 2x^2)e^{-x}$$

$$y'(0) = 1 = \lambda - 1$$

Donc $\lambda = 2$

LA solution satisfaisant aux conditions initiales est : $f(x) = (2x + 1 + 2x^2)e^{-x}$

5.2/On considère x la fonction définie sur IR, de la variable t vérifiant l'équation différentielle : $x''(t) + 4x(t) = -6\sin(t)$

5.2.1/Résoudre l'équation différentielle : $x''(t) + 4x(t) = 0$

5.2.2/Vérifier que $g(t) = -2 \sin(t)$ est une solution particulière de l'ED avec second membre.

5.2.3/En déduire les solutions de l'ED.

5.2.4/ Déterminer la fonction x solution de l'ED vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$

5.2.1/Etape 1 : « sans second membre »

Equation caractéristique : $r^2 + 0 \times r + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16$$

Δ est négatif : il ya donc deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et } r_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad r_1 = \frac{-i\sqrt{-16}}{2} \quad \text{et } r_2 = \frac{+i\sqrt{-16}}{2} \quad r_1 = \frac{-i\sqrt{-16}}{2} \quad \text{et } r_2 = \frac{+i\sqrt{-16}}{2}$$

$$r_1 = 2i \text{ et } r_2 = -2i$$

Le cours : « - Si $\Delta < 0$

alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta.$$

La solution générale de l'ED est alors !

$$f(x) = (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))e^{\alpha x} \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux constantes. »}$$

Pour nous $\alpha = 0$ et $\beta = 2$

$$\text{Donc } x_0 = (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t))e^0 = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$$

5.2.2/Etape 2

Vérifions que $g(t) = -2 \sin(t)$ est une solution particulière de l'ED avec second membre

$$g'(t) = -2 \cos(t)$$

$$g''(t) = -2(-\sin(t)) = 2\sin(t)$$

$$g''(t) + 4g(t) = 2\sin t + 4 \times (-2\sin t) = (2 - 4 \times 2)\sin(t) = -6\sin(t)$$

C'est vérifié !

5.2.3/ les solutions s'obtiennent en faisant la somme des solutions sans second membre et de la solution particulière avec second membre :

$$x(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) - 2\sin t$$

5.2.4/les conditions initiales sont

$$x(0) = -1 \text{ et } x'(0) = 0$$

Première condition initiale : $x(0) = -1$

$$x(0) = \lambda \cos(2 \times 0) + \mu \sin(2 \times 0) - 2\sin 0 = \lambda = -1$$

Donc : $\lambda = -1$

Première condition initiale : $x'(0) = 0$

$$x'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t) - 2\cos t$$

$$x'(0) = -2\lambda \sin(2 \times 0) + 2\mu \cos(2 \times 0) - 2\cos 0 = 2\mu - 2 = 0$$

Donc $\mu = 1$

Pour conclure la solution correspondant aux conditions initiales est : $x(t) = -\cos(2t) + \sin(2t) - 2\sin t$

6/ exercice1

1 a $\Delta = 3^2 - 4 \times 10 \times 0.2 = 1$

$$r_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2 \times 10} = -0.2 \qquad r_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2 \times 10} = -0.1$$

1 b les solutions de E_0 : $y_0(t) = \lambda e^{-0.2t} + \mu e^{-0.1t}$

2 $g(t) = 5$ donc $g'(t) = 0$ donc $g''(t) = 0$

On remplace dans l'ED 10 $g'' + 3g' + 0.2g = 0 + 0 + 0.2 \times 5 = 1$

Ce qu'il fallait démontrer

3 L'ensemble des solutions s'obtient en additionnant les solutions de l'équation sans second membre et la solution particulière :

$$y(t) = \lambda e^{-0.2t} + \mu e^{-0.1t} + 5$$

4

$$y(2) = -3e^{-0.2 \times 2} + 6e^{-0.1 \times 2} + 5 = 7.9m$$

6/ exercice2

A. Résolution d'une équation différentielle

1. a. $r^2 + 5r + 4 = 0$ est une équation du second degré dont les solutions sont : $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$

b. D'après le rappel des formules, la solution générale, sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$y'' + 5y' + 4y = 0 \text{ est } y(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-4x}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

2. Le résultat du logiciel de calcul formel permet de dire que f , la solution générale sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 4y = 10$$

a pour expression :

$$f(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-4x} + \frac{5}{2}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

On a donc $f'(x) = -k_1 e^{-x} + (-4)k_2 e^{-4x} = -k_1 e^{-x} - 4k_2 e^{-4x}$.

Déterminons la solution particulière telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 + k_2 + \frac{5}{2} = 5 \\ -k_1 - 4k_2 = -1 \end{cases}, \text{ d'où par somme}$$

$$-3k_2 = \frac{3}{2} \iff k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Par substitution dans la première équation :

$$k_1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 5 \iff k_1 = 3.$$

La solution particulière est définie par : $f(x) = 3e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-4x} + \frac{5}{2}$.

Ou par substitution : j'exprime k_1 en fonction de k_2 dans la deuxième

$$-k_1 = -1 + 4k_2 \quad k_1 = 1 - 4k_2 \quad \text{et je remplace dans la première } 1 - 4k_2 + k_2 + \frac{5}{2} = 5 \quad 1 - 3k_2 = 5 - \frac{5}{2} \quad -3k_2 = 5 - \frac{5}{2} - 1$$

$$-3k_2 = 3/2 \quad k_2 = 3/2 / (-3) = -1/2$$