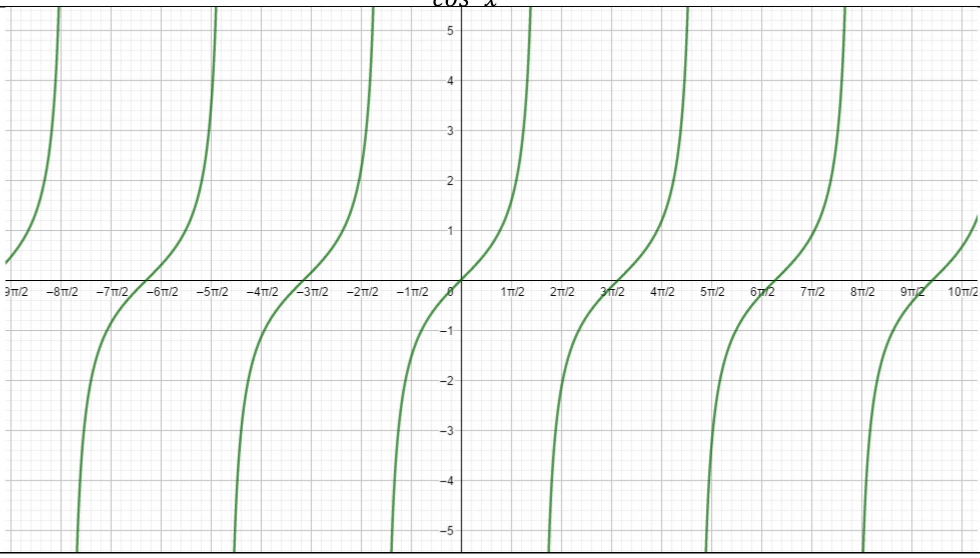
FONCTIONS TANGENTE ET ARCTANGENTE

1/La fonction tangente

<table>
<tr><td>$f(x) = \tan x = \frac{sinx}{cosx}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Domaine de définition</td><td>$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$</td></tr>
<tr><td>Périodicité</td><td>La fonction tangente est π $périodique$: $\tan(x+\pi) = \tan \pi$</td></tr>
<tr><td>Parité</td><td>La fonction tangente est impaire : $\tan(-x) = -tanx$
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine O</td></tr>
<tr><td>Dérivée</td><td>$f'(x) = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2x$</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique</td><td></td></tr>
<tr><td>Limites</td><td>$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$</td></tr>
<tr><td>Tableau de variation</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td>0</td><td>$+\frac{\pi}{2}$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Tableau de signe</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td>0</td><td>$+\frac{\pi}{2}$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

Application : Compléter les tableaux ci-dessous (calcul à la main pour tan(a), avec une valeur exacte !)

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
b = Tan a	0		1		-1

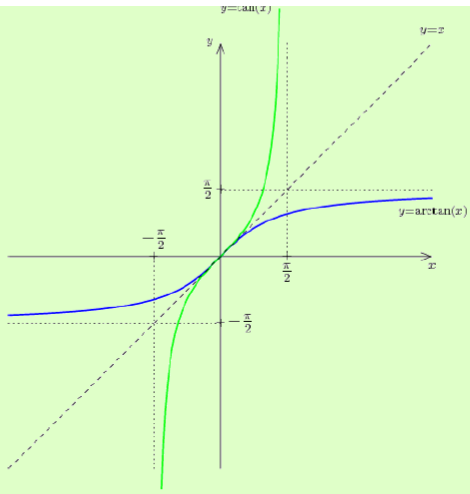
b	0	1			-1
a tel que tan(a) = b	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$

Ainsi, on définit une nouvelle fonction f que l'on va noter **Arctan**, définie par, f(b) = Arctan(b). C'est la fonction **réciproque** de tangente.

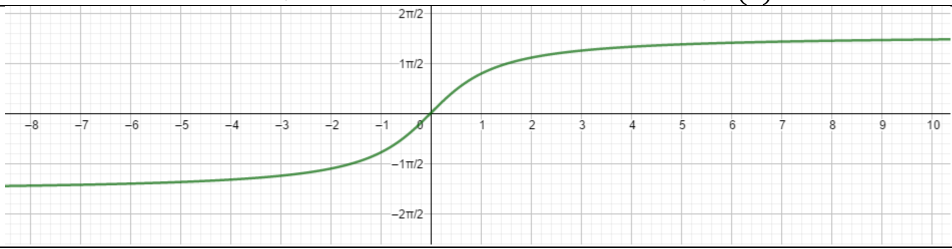
Leurs courbes seront donc **symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.**

ATTENTION, avec les calculatrices, on utilise la touche $\boxed{\tan^{-1}}$ ou $\boxed{\text{Atn}}$

Ainsi, $\begin{cases} \tan(x) = y \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = Arctan(y) \\ y \in \text{IR} \end{cases}$

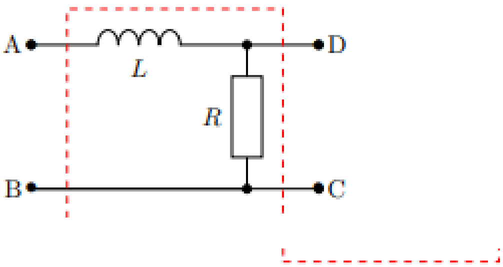


2/La fonction arctan

$f(x) = \arctan x$	
Domaine de définition	$\mathbb{R}$
Parité	La fonction tangente est impaire : $\arctan(-x) = -arctanx$ Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine O
Dérivée	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $f'(u(x)) = \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
Représentation graphique	
Limites	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\frac{\pi}{2}$
Tableau de variation	x : $-\infty$ 0 $+\infty$ $f(x)$:
Tableau de signe	x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$:

3/ Exemple d'application en physique

Un filtre nommé F est schématisé ci-contre :



On suppose que la fonction de transfert H du filtre F vérifie, pour tout réel $\omega > 0$: $H(j\omega) = \dfrac{R}{R + j\mathrm{L}\omega}$.

On pose $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

On note φ l'argument principal de $H(j\omega)$

1. **Expression de la fonction φ.**

   Montrer que $\varphi(\omega) = -\arctan \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

2. **Étude de la fonction G**

   (a) Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(\omega_0)$ et $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \varphi(\omega)$.

   (c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction φ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.