SUITES NUMERIQUES

1/ Suites

1.1/Définition : Une suite est une application de ℕ dans ℝ qui, à tout nombre n associe le terme d'indice n de la suite noté u_n

La liste de tous les nombre de la suite se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n)

La représentation graphique de (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées (n ; u_n)

On dit que la suite est croissante si pour tout n :$u_{n+1} \geq u_n$

On dit que la suite est décroissante si pour tout n :$u_{n+1} \leq u_n$

On dit qu'une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

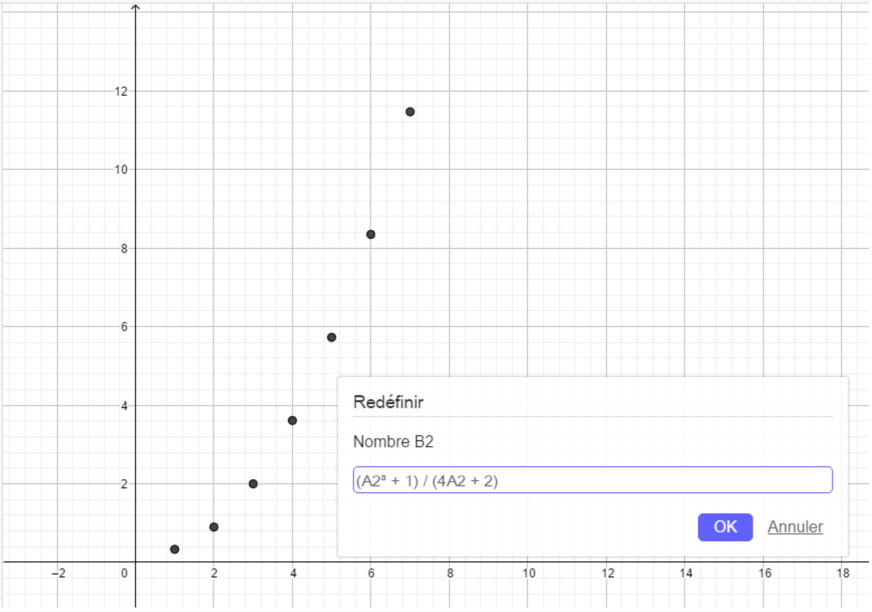
On dit que la suite est constante si pour tout n :$u_{n+1} = u_n$

1.2/Exemples

1.2.1/Suite définie par une formule explicite :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^3+1}{4n+2}$

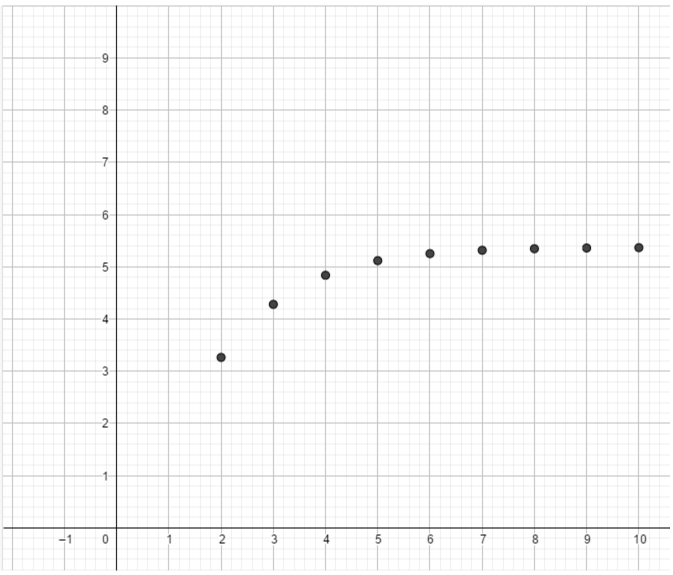
	A	B
1		
2	1	0.33
3	2	0.9
4	3	2
5	4	3.61
6	5	5.73
7	6	8.35
8	7	11.47
9	8	15.09
10	9	19.21
11	10	23.83
12	11	28.96
13	12	34.58
14	13	40.7
15	14	47.33
16	15	54.45
17	16	62.08
18	17	70.2
19	18	78.82
20	19	87.95
21	20	97.57
22	21	107.7
23	22	118.32
24		



1.2.2/ Suite définie par la donnée du premier terme et une relation de récurrence :

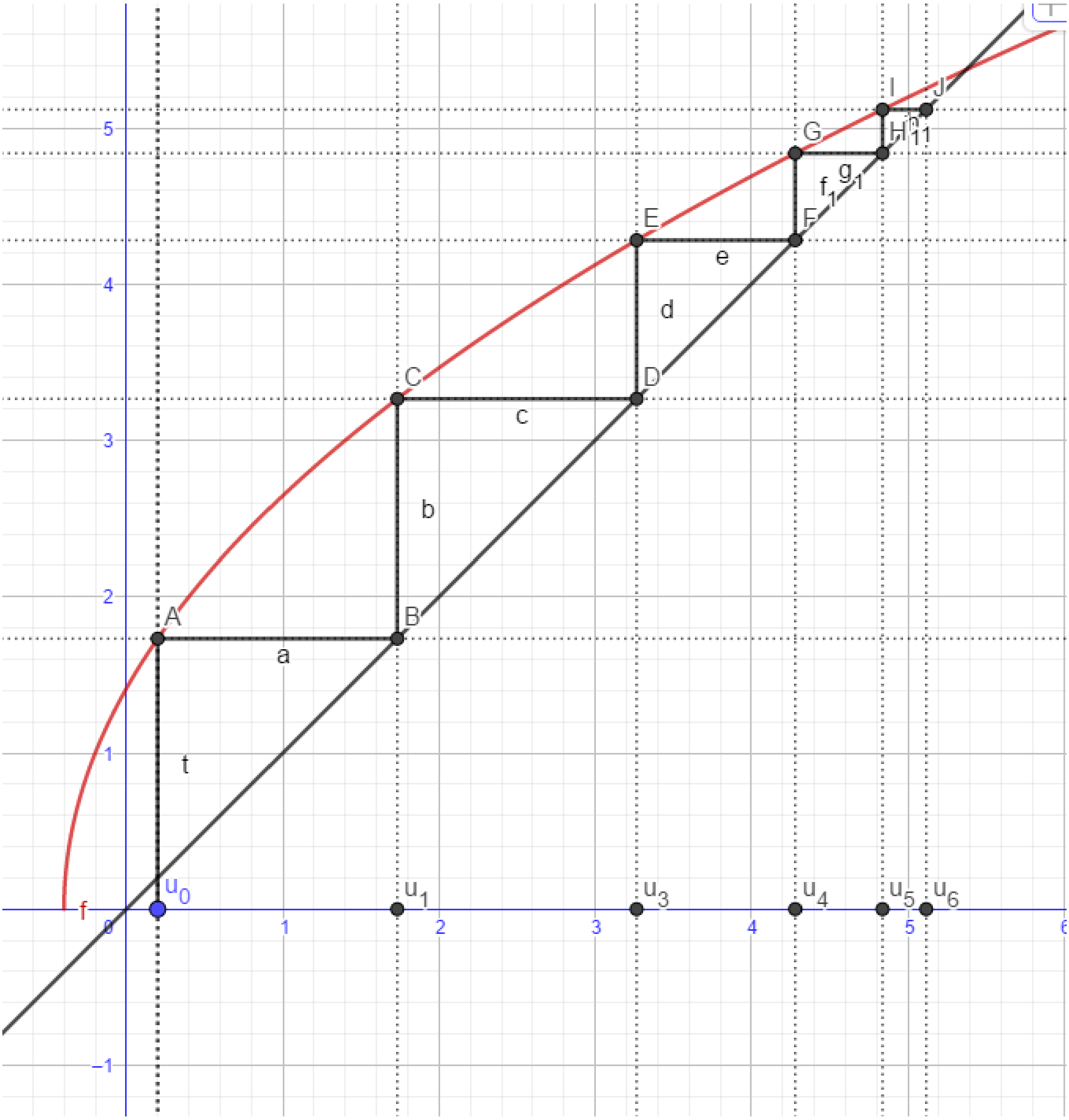
On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0.2 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 2} \end{cases}$

	A	B
1	0	0.2
2	1	=sqrt(5B1 + 2)
3	2	3.27
4	3	4.28
5	4	4.84
6	5	5.12
7	6	5.25
8	7	5.32
9	8	5.35
10	9	5.36
11	10	5.37
12	11	5.37
13	12	5.37
14	13	5.37
15	14	5.37
16	15	5.37
17	16	5.37
18	17	5.37
19	18	5.37
20	19	5.37
21	20	5.37
22	21	5.37
23	22	5.37

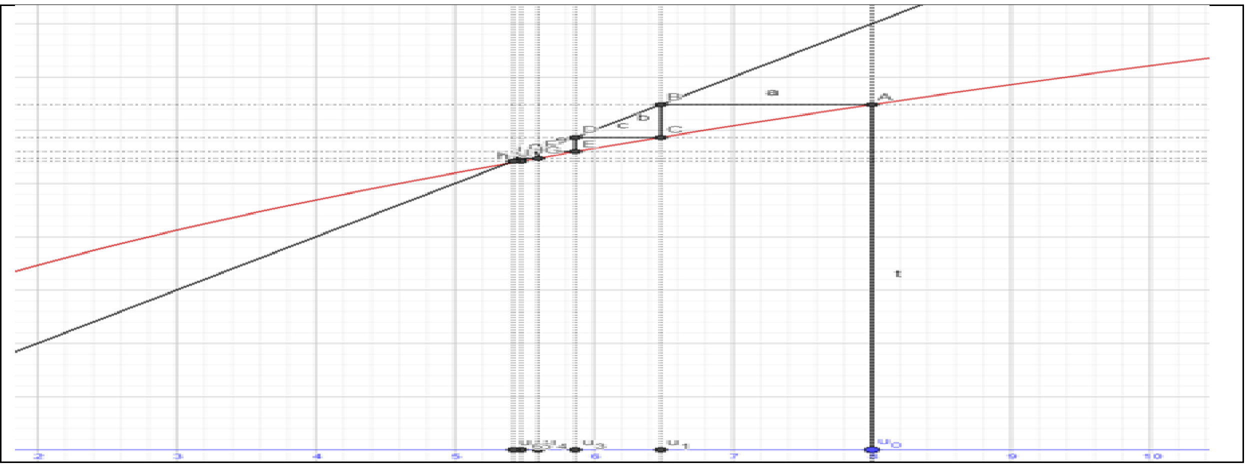


On voit que les valeurs de la suite semble se « stabiliser aux environs de 5,37. Explication :

A l’aide de Geogebra on trace la courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{5x+2}$ et la droite d’équation y=x pour pouvoir repporter les valeurs de u_n



Remarque : on peut choisir de prendre $u_0 = 8$



2/Suites arithmétiques

2.1/ Définition : une suite (u_n) est arithmétique si pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + a$, où $a \in \mathbb{R}$
a est appelé la raison de la suite . La représentation d'une suite arithmétique est une droite.

2.2/Sens de variation
si a >0 alors la suite (u_n) est strictement croissante
si a <0 alors la suite (u_n) est strictement décroissante
si a=0 alors la suite (u_n) est constante

2.3/Terme de rang n
On peut exprimer u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + n \times a$ ou $u_n = u_1 + (n-1) \times a$

2.4/Somme
La somme de termes consécutifs est $S = (nombre\ de\ termes) \times (\frac{premier\ terme + dernier\ terme\ d}{2})$
En particulier $S_n = u_0 + u_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . + u_{n-1} + u_n$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (\mathrm{n}+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Application : déterminer 1+2+…….+(n-1)+n

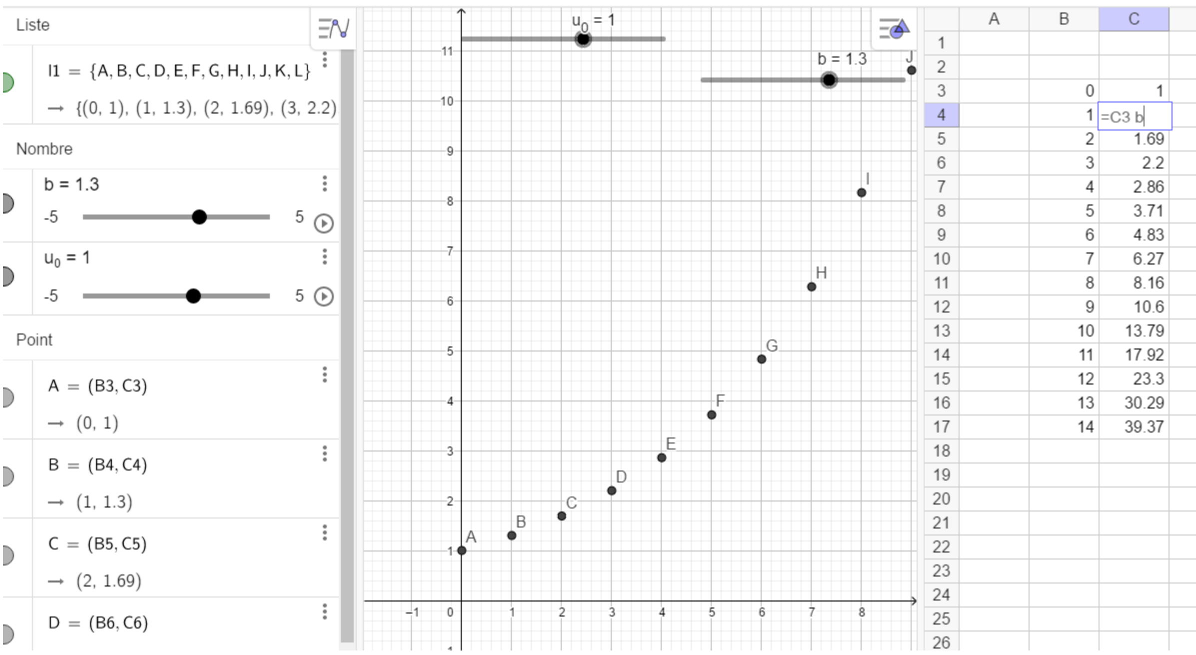
3/Suites géométriques

3.1/Une suite (u_n) est géométique si pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = b \times u_n$, où $b \in \mathbb{R}^*$
b est appelé la raison de la suite :

3.2/ Sens de variation :
si le premier terme de la suite est strictement positif :
si b >1 alors la suite (u_n) est strictement croissante
si b <1 alors la suite (u_n) est strictement décroissante
si b=1 alors la suite (u_n) est constante

Pour regarder l'influence de b et de u_0 avec Geogebra :

Créer deux curseurs u_0 et b/ affichage tableur /en C4 entrer « =C3*b » puis glisser / sélectionner les colonnes B et C puis créer une liste de points



3.3/Terme de rang n : $u_n = u_0 \times b^n$ ou $u_n = u_1 \times b^{n-1}$

3.4/ Somme
La somme de termes consécutifs est $S = u_0 \times (\frac{1 - b^{nombre\ de\ termes}}{1-b})$

En particulier $S_n = v_0 + v_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . + v_{n-1} + v_n =$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = u_0 \frac{1 - b^{n+1}}{1-b}$$

4/ Introduction aux séries

4.1/Définition : une série est une somme infinie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . + v_{n-1} + \; v_n$ s'appelle la somme partielle d'ordre n

$$\sum_{k=0}^{n} v_k$$

On dit que la série de terme général v_n converge si la suite des somme partielle (S_n) converge

Exemple : la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

converge pour $|q| < 1 \; et$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

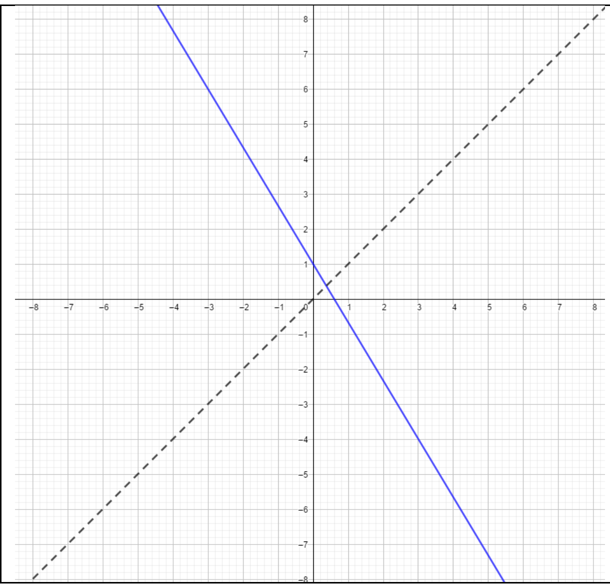
5/ Exercices

5.1/
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{3} u_n \end{cases}$$

Représenter la suite (u_n)

En abscisse du diagramme ci-contre



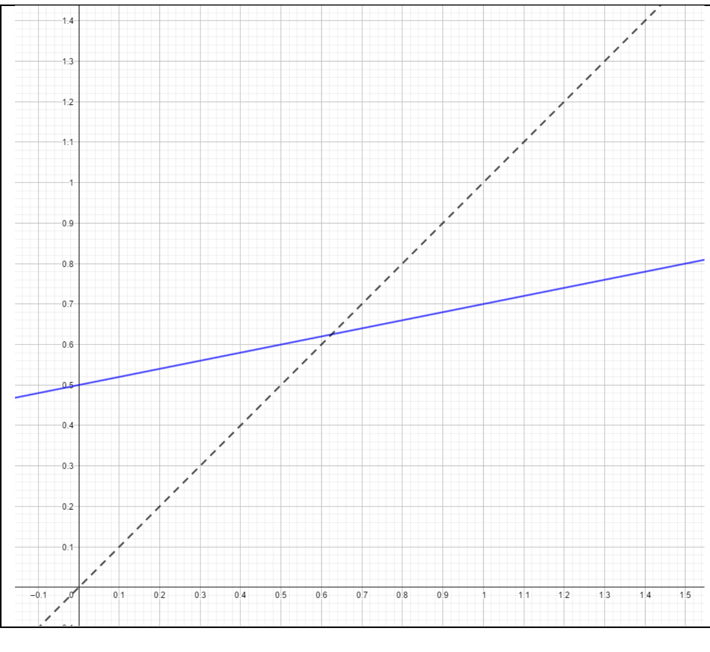
5.2
On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1.4 \\ v_{n+1} = 0.5 + 0.2 v_n \end{cases}$$

Représenter la suite (u_n)

En abscisse du diagramme ci-contre

Conjecturer la monotonie et la convergence éventuelle de la suite



5.2/Les parents de Paul et Virginie ont hérité d'une somme de 10 000€ qu'ils offrent en deux parts égales à leurs enfants.

Paul place la totalité de sa part au taux de 3% par an à intérêt composés (les intérêts sont calculés chaque année en ajoutant les intérêts perçus les années précédentes).

Virginie place sa part aux taux de 3.5% par à intérêts simples (les intérêts sont calculés la première année et mis de côté ; c'est donc la même somme qui est versée chaque année sur le compte))

5.2.1/On note u_n le capital acquis par Paul au bout de n années

Calculer u_1, u_2 et u_3

Expliquer pourquoi la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exprimer u_n en fonction de n.

5.2.2/On note v_n le capital acquis par Virginie au bout de n années

Calculer v_1, v_2 et v_3

Expliquer pourquoi la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exprimer v_n en fonction de n.

C3 | =C2+0,035*C2

	A	B	C	D
1	année	Paul	Virginie	
2	0	5000	5000	
3	1	5150	5175	
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			
13	11			
14	12			
15	13			
16	14			
17	15			
18	16			
19	17			
20	18			
21	19			
22	20			

5.2.3/ Utiliser un tableur pour calculer l'évolution de leur capital sur les 20 premières années.
En B3 : =B2*1.03
En C3 : =C2*0.035C2

5.2.3/ Qui fait le meilleur placement au début ?
Au bout de combien d'années la tendance s'inverse-t-elle ?

5.2.4/ Au bout de combien d'années le capital de Paul aura-t-il atteint 7500€ ?
Retrouver le résultat par le calcul.