

BTS CIRA1 (2026-2027) — Mathématiques

Chapitre 01 — Retour sur les bases

OUVERTURE — Pourquoi ce chapitre ?

Ce chapitre reprend les automatismes de calcul algébrique qui serviront toute l'année : ils permettent de manipuler les formules d'électricité (loi des mailles, diviseur de tension), de simplifier les fonctions de transfert $H(p)$, et préparent directement les outils du programme CIRA — nombres complexes, équations différentielles, transformée de Laplace en 2e année.

1. Développer et factoriser

DÉFINITION — Développer / Factoriser

Développer signifie transformer un produit en une somme d'éléments :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Factoriser est l'opération inverse : transformer une somme d'éléments en un produit, en repérant un facteur commun.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Développer et factoriser sert en permanence : simplifier une expression d'impédance, mettre en facteur un terme commun dans une fonction de transfert $H(p)$, ou retrouver une forme canonique à partir d'un calcul de gain.

EXERCICE — Développer / factoriser

Développer : $3(2R - 1)$ $5(3 - p) - 3(7 - 2p)$ $R(2R + 3) - 5R$
Factoriser : $R^2 - 2R$ $4(R - 1) - (R - 1)(R + 1)$ $(p + 1)(p + 2) - p - 1$

2. Double distributivité

PROPRIÉTÉ — La double distributivité et les signes

Il faut absolument tenir compte du signe des éléments quand on développe :

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

On retrouvera cette double distributivité pour développer le produit de deux impédances complexes $Z_1 \times Z_2$, dès le chapitre sur les nombres complexes.

EXERCICE — Développer et réduire

$$(1 - R)(3 + R) \quad (2R - 1)(4R - 1) - 8R^2 - 1 \quad (p - 1)(-p^2 + 2p + 1)$$

3. Identités remarquables

PROPRIÉTÉ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Ces identités apparaissent quand on calcule le module d'une impédance $|Z|^2 = R^2 + X^2$ (forme $a^2 + b^2$), ou pour mettre une fonction de transfert du second ordre sous forme canonique.

EXERCICE — Trouver l'intrus

Parmi la liste ci-dessous, une forme développée est reliée à une unique forme factorisée — trouver les 3 formes qui n'ont pas de correspondance :

$$\begin{array}{cccc} 4x^2 - 1 & (2x - 1)(2x + 1) & 2x^2 + 4x + 1 & 16x^2 - 1 \\ (4x + 1)^2 & (4x - 1)^2 & 4x^2 + 4x + 1 & 4x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

4. Les fractions : simplifier

DÉFINITION

On simplifie le numérateur et le dénominateur par un même nombre :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Simplifier une fraction, c'est ce qu'on fait pour réduire une fonction de transfert $H(p) = N(p)/D(p)$ à sa forme la plus simple avant de l'étudier.

EXERCICE — Simplifier

Simplifier : $\frac{27}{24} \frac{104}{84}$

Compléter : $\frac{4}{x} = \frac{\dots}{x^2}$

Factoriser et simplifier : $\frac{z^2 - z}{z(z - 2)}$

5. Les fractions : diviser

DÉFINITION

L'inverse du nombre a est $\frac{1}{a}$; l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$, donc :

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad \text{et donc} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

La formule du diviseur de tension $U_2 = U \times R_2/(R_1+R_2)$ et le calcul d'un gain composé $G = G_1 \times G_2$ utilisent exactement cette technique.

EXERCICE — Calculer / transformer

Calculer : $\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{\frac{-7}{4}}{-21} = \frac{\frac{-9}{4}}{\frac{-6}{5}}$

Transformer : $\frac{\frac{1}{(p+1)}}{(p+1)} \frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}$

6. Les racines carrées

DÉFINITION — Pour $a \geq 0$

$$\sqrt{a^2} = a \quad (\sqrt{a})^2 = a \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour ne pas avoir de racine carrée au dénominateur, par exemple pour $\frac{1}{\sqrt{a}}$, on multiplie haut et bas par $\sqrt{a}$.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Le module d'une impédance $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ et la valeur efficace d'un signal sinusoïdal $U_{\text{eff}} = U_{\text{max}}/\sqrt{2}$ se calculent avec ces règles.

7. Les puissances

DÉFINITION

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Ces règles sont indispensables pour jongler avec les unités (mA, kΩ, MHz = 10^6 Hz) et pour manipuler les puissances de p dans une fonction de transfert.

EXERCICE — Calculer

Calculer : $2^3 \times 2^4$ $3^3 \times 3^{-5}$ $\frac{10^3 \times 10^{-5}}{10^{-6} \times 10^3}$

8. Équation du premier degré à une inconnue

PROPRIÉTÉ

$$x + b = c \Rightarrow x = c - b$$

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c - b}{a}$$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

C'est le calcul qu'on fait pour lire une mesure à partir d'une droite d'étalonnage de capteur, ou pour retrouver un temps à partir d'une valeur de tension.

EXERCICE — Résoudre

$x - 3 = 5$ $-2x = 4$ $3x + 4 = 5$ $3x - 2 = -2x + 4$ $(2x - 3)(5x - 4) = 2(2x - 3)^2$

APPLICATION CIRA — Droite d'étalonnage d'un capteur

Un capteur de température (plage 0-100°C) délivre un courant I (en mA) tel que $I = 0,16 \times T + 4$, où T est la température en °C. Le courant mesuré vaut $I = 13,2$ mA. Calculer la température T correspondante.

9. Inéquation

PROPRIÉTÉ

C'est pareil que pour les équations, sauf pour $ax \leq b$ qui devient $x \geq \frac{b}{a}$ quand a est négatif.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Les seuils d'alarme et les plages de fonctionnement d'un capteur ou d'un régulateur se traduisent par des inéquations de ce type.

APPLICATION CIRA — Seuil d'alarme

Une alarme de surpression se déclenche lorsque la pression p (en bar) mesurée vérifie $3p - 2 > 10$. Déterminer les valeurs de p qui déclenchent l'alarme.

10. Système de deux équations à deux inconnues

MÉTHODE — Deux méthodes de résolution

Substitution : isoler une variable dans une équation, la remplacer dans l'autre, résoudre l'équation du premier degré obtenue, puis revenir à la première variable.

Combinaison linéaire : multiplier si besoin une équation pour que le coefficient d'une variable soit le même dans les deux équations, puis additionner ou soustraire pour l'éliminer.

EXERCICE — Résoudre

Par substitution : $2x - 3y = 7$ et $x + 5y = -3$

Par combinaison linéaire : $2a + 3b = 6$ et $a - 2b = 2$

APPLICATION CIRA — Étalonnage d'un capteur à deux points

Un capteur de niveau délivre une tension $U = a \times \text{niveau} + b$. On mesure $U = 1 \text{ V}$ pour un niveau de 0,2 m, et $U = 4 \text{ V}$ pour un niveau de 1,4 m. Déterminer les coefficients a et b de la droite d'étalonnage du capteur.

11. Équation du second degré à une inconnue et signe du trinôme

PROPRIÉTÉ — Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, une solution unique $x_1 = x_2 = -b/2a$.
- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

PROPRIÉTÉ — Signe de $ax^2 + bx + c$

Si $\Delta \leq 0$, le trinôme est toujours du signe de a (sauf en la racine double, où il s'annule, si $\Delta = 0$).

Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe opposé à a entre les deux racines.

EXERCICE — Résoudre

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad x^2 + 3,2x + 2,56 = 0$$

APPLICATION CIRA — Régime d'un système du second ordre

Un système du second ordre a pour équation caractéristique $r^2 + 6r + c = 0$. Déterminer, selon les valeurs de c , si sa réponse est apériodique ($\Delta > 0$), critique ($\Delta = 0$) ou oscillante ($\Delta < 0$) — les trois régimes que vous retrouverez au chapitre équations différentielles.

12. Polynôme et identification

DÉFINITION

Un polynôme est une somme de puissances de x . Un polynôme de degré n s'écrit sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Identification : deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et si les coefficients de même degré sont égaux.

Une fonction est rationnelle si elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes, avec $Q(x) \neq 0$. L'identification de fonctions rationnelles fonctionne de la même manière qu'avec les polynômes.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Cette méthode d'identification, déjà amorcée ci-dessous avec les variables p et z (celles de la transformée de Laplace et de la transformée en z), est exactement celle que vous réutiliserez en 2e année pour décomposer une fonction de transfert $H(p)$ en éléments simples avant de calculer sa transformée de Laplace inverse.

EXERCICE — Identifier

Déterminer a, b, c tels que : $2x^3 - x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

Réduire au même dénominateur : $\frac{1}{p} - \frac{1}{(p+20)}$

Déterminer a et b tels que : $\frac{7-p}{p^2+p-2} = \frac{a}{(p+1)} + \frac{b}{(p-2)}$

Exercice 1 — déterminer a, b, c tels que : $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$

Exercice 2 — déterminer a et b tels que : $\frac{8}{p^2(p^2+4)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p^2+4}$

APPLICATION CIRA — De l'identification à la transformée de Laplace inverse

C'est exactement cette étape de décomposition qui, en 2e année, permettra de retrouver l'original temporel $h(t)$ d'un signal à partir de sa fonction de transfert $H(p)$, grâce aux transformées de Laplace usuelles.