

BTS CIRA1 (2026-2027) — Mathématiques

Chapitre 02 — Fonctions usuelles

OUVERTURE — Pourquoi ce chapitre ?

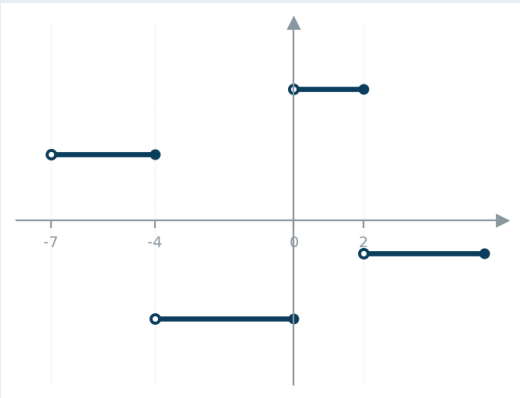
Un signal (tension, courant, consigne, mesure...) est avant tout une fonction du temps. Ce chapitre passe en revue les fonctions de référence — escalier, échelon, affine, racine, inverse, logarithme, exponentielle, sinus/cosinus — qui serviront à décrire et calculer le comportement des systèmes étudiés en CIRA : réponse d'un capteur, gain en décibels, charge d'un condensateur, signal sinusoïdal du secteur...

1. Fonctions en escalier

DÉFINITION — Fonction en escalier

Une fonction en escalier est une fonction constante sur des intervalles : on parle de fonction constante par morceaux. Sa représentation graphique est une succession de segments (ou demi-droites) parallèles à l'axe des abscisses.

Attention : en mathématiques, on ne relie pas les paliers entre eux — il y a des sauts. Un point ne peut avoir qu'une seule image (contrairement à certaines représentations utilisées en physique).



DÉFINITION — Exemple

Fonction f définie sur $[-7 ; +\infty[$ par :

Intervalle	Valeur de f
$-7 \leq x \leq -4$	2
$-4 < x \leq 0$	-3
$0 < x < 2$	4
$x \geq 2$	-1

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Un signal logique (tout-ou-rien) — sortie d'un relais, d'un capteur de proximité, d'un régulateur ON/OFF — est une fonction en escalier : elle ne prend que quelques valeurs discrètes (souvent 0 et 1, ou 0 et une tension d'alimentation).

EXERCICE — Représenter

Représenter graphiquement la fonction f définie ci-dessus sur $[-7 ; +\infty[$.

🔧 APPLICATION CIRA — Sortie d'un régulateur tout-ou-rien

Un régulateur de température tout-ou-rien pilote une résistance chauffante : sa sortie $s(t)$ vaut 0 V si la température mesurée est supérieure à la consigne, et 10 V sinon. Entre $t = 0$ et $t = 12$ min, la résistance chauffe de $t = 0$ à $t = 3$ min ($s = 10$ V), est coupée de $t = 3$ à $t = 8$ min ($s = 0$ V), puis chauffe à nouveau de $t = 8$ à $t = 12$ min ($s = 10$ V). Représenter $s(t)$ sous forme d'une fonction en escalier.

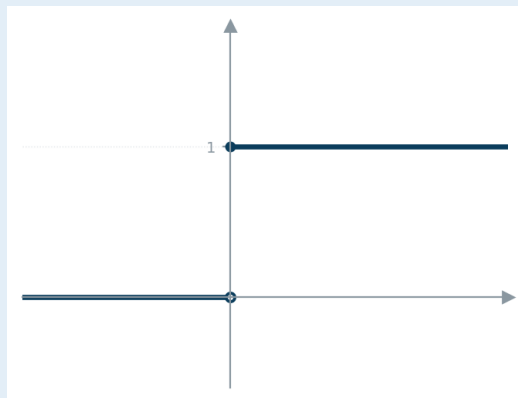
2. Fonction échelon unité

DÉFINITION — Échelon unité $U(t)$

La fonction échelon unité, notée $U(t)$, est définie par :

$$U(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

$$U(t) = 1 \text{ si } t \geq 0$$



DÉFINITION — Échelon retardé $U(t - \tau)$

La fonction échelon unité retardée de τ , notée $U(t - \tau)$, est définie par :

$$U(t - \tau) = 0 \text{ si } t < \tau$$

$$U(t - \tau) = 1 \text{ si } t \geq \tau$$

Attention au signe : c'est bien $-\tau$ dans l'écriture de la fonction, et on effectue une translation de $+\tau$.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

L'échelon unité modélise un échelon de consigne ou un échelon de commande : on l'utilise systématiquement pour caractériser un système (essai indiciel) — on impose une variation brusque de l'entrée à un instant donné, et on observe la réponse en sortie.

EXERCICE — Tracer

Tracer la courbe représentative de la fonction définie par $f(t) = 2 U(t) - 3 U(t - 1)$.

 APPLICATION CIRA — Essai indiciel d'un capteur

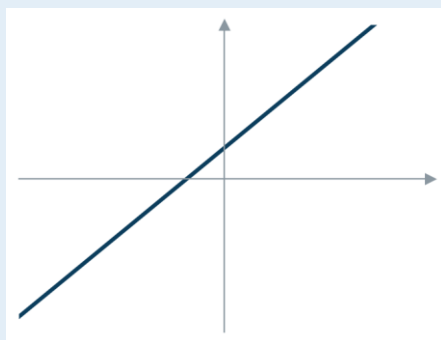
Pour caractériser un capteur de température, on le plonge brutalement à l'instant $t = 0$ s dans un bain à 80°C alors qu'il était à 20°C . Écrire, à l'aide de la fonction échelon, l'expression de la consigne de température appliquée au capteur (on note $T(t)$ cette consigne, avec $T(t) = 20^\circ\text{C}$ pour $t < 0$).

3. Fonction affine

DÉFINITION — $f(x) = ax + b$

Dérivée : $f'(x) = a$.

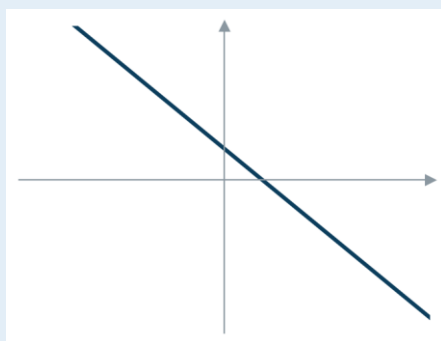
Cas $a > 0$



Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	

Cas $a < 0$



Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	

REMARQUE

Si $a = 0$, f est une fonction constante : sa courbe est une droite parallèle à l'axe des abscisses. Si $b = 0$, f est une fonction linéaire : sa courbe est une droite qui passe par l'origine.

DÉFINITION — Droites — coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Une fonction affine se représente par une droite d'équation $y = ax + b$. Pour la tracer, il suffit de calculer les images de deux valeurs de x bien choisies.

a est le coefficient directeur : $a = \frac{\text{montée}}{\text{avancée}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si on connaît deux points A et B de la droite : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

b est l'ordonnée à l'origine : c'est la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe des ordonnées (en effet, $f(0) = b$).

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

La loi d'étalonnage d'un capteur linéaire (grandeur mesurée = $a \times$ grandeur physique + b), le gain statique d'un amplificateur, la caractéristique d'une vanne linéaire... sont des fonctions affines : a est le gain (ou la sensibilité), b est l'offset (ou le zéro).

EXERCICE — Tracer sans tableau de valeurs

$$y = -x - 1 \quad \text{et} \quad y = 0,5x + 2$$

APPLICATION CIRA — Étalonnage linéaire d'un capteur de pression

Un capteur de pression délivre une tension U (en V) telle que $U = a \times p + b$, où p est la pression en bar. On mesure $U = 0,5$ V pour $p = 0$ bar, et $U = 4,5$ V pour $p = 8$ bar. Déterminer a et b , puis calculer la tension délivrée pour $p = 5$ bar.

4. Fonctions polynômes du second degré

REMARQUE

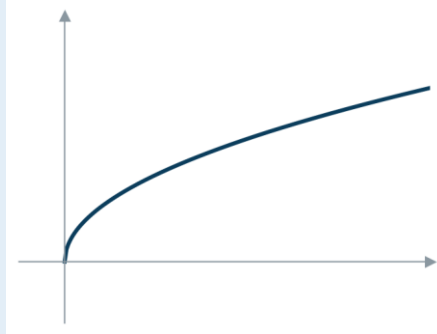
Déjà vu au chapitre 1 (identités remarquables, résolution de $ax^2 + bx + c = 0$, signe du trinôme) — voir CIRA1-01-retour-sur-les-bases-cours.docx.

5. La fonction racine carrée

DÉFINITION

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Domaine de définition : $D_f = [0 ; +\infty[$. Dérivée : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



Limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	

Remarque : la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ étant la réciproque de $f(x) = x^2$ (pour $x \geq 0$), leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Le débit à travers une vanne ou un organe déprimogène (diaphragme, Venturi) suit une loi en racine carrée de la perte de charge : $Q = k\sqrt{\Delta p}$. C'est aussi la loi de Torricelli pour la vitesse de vidange d'une cuve : $v = \sqrt{2gh}$.

EXERCICE — Calculer / résoudre

$\sqrt{50}$ $\sqrt{4 \times 9}$ résoudre : $\sqrt{x} = 3$

🔧 APPLICATION CIRA — Débit à travers une vanne

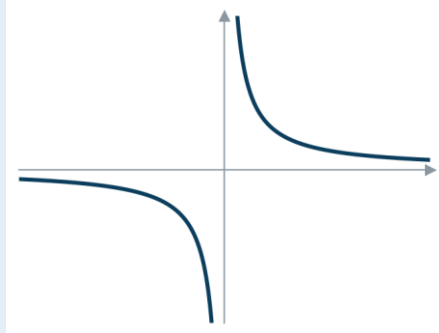
Le débit Q (en m^3/h) d'une vanne vérifie $Q = 12\sqrt{\Delta p}$, où Δp est la perte de charge en bar. Calculer Q pour $\Delta p = 4$ bar, puis déterminer Δp pour obtenir un débit de $36 \text{ m}^3/\text{h}$.

6. Les fonctions inverses

DÉFINITION

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$. Dérivée (pour $a > 0$) : $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$.



Asymptotes (pour $a > 0$) : verticale d'équation $x = 0$, horizontale d'équation $y = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)			

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

La réactance d'un condensateur, $X_c = 1 / (C\omega)$, et l'impédance d'un condensateur en fonction de la fréquence sont des fonctions inverses. C'est aussi la forme de la relation débit/temps de remplissage à volume constant.

EXERCICE — Calculer des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x}$$

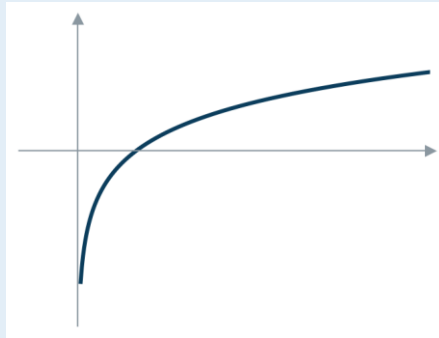
APPLICATION CIRA — Réactance capacitive d'un filtre

La réactance d'un condensateur de capacité $C = 100 \text{ nF}$ vaut $X_c = \frac{1}{2\pi f C}$. Calculer X_c pour une fréquence $f = 1 \text{ kHz}$, puis pour $f = 10 \text{ kHz}$. Que devient X_c quand f augmente ?

7. Les fonctions ln et log

DÉFINITION — $f(x) = \ln(x)$

Domaine de définition : $D_f =]0 ; +\infty[$. Dérivée : $f'(x) = \frac{1}{x}$.



Limite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 0$). Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	

PROPRIÉTÉ — Propriétés du logarithme

$$\ln(1) = 0 \quad \ln(e) = 1$$

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^p) = p \times \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$$

Le logarithme décimal, noté log, est défini par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

Le logarithme sert à exprimer un gain ou une atténuation en décibels : $G_{dB} = 20 \times \log(V_s/V_e)$ pour un gain en tension, $G_{dB} = 10 \times \log(P_s/P_e)$ pour un gain en puissance. C'est l'unité de référence en instrumentation et en traitement du signal.

EXERCICE — Simplifier / exprimer en fonction de $\ln 2$

Simplifier : $\ln(6) - \ln(2)$ $\ln(\sqrt{e})$

Exprimer en fonction de $\ln(2)$: $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\ln(8)$ $\ln(64e)$

APPLICATION CIRA — Gain en décibels d'un amplificateur

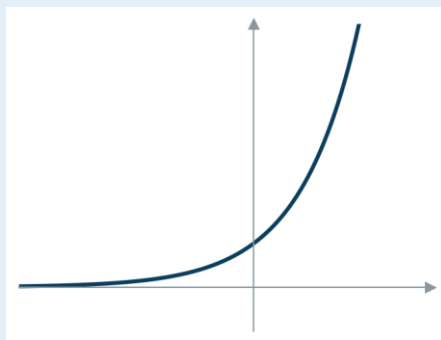
Un amplificateur reçoit une tension d'entrée $V_e = 20 \text{ mV}$ et délivre une tension de sortie $V_s = 2 \text{ V}$.
Calculer le gain en tension $G = \frac{V_s}{V_e}$, puis le gain en décibels $G_{dB} = 20 \log(G)$.

8. Fonction exponentielle

DÉFINITION

$$f(x) = e^x$$

Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$. Dérivée : $f'(x) = e^x$.



Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$). Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)		

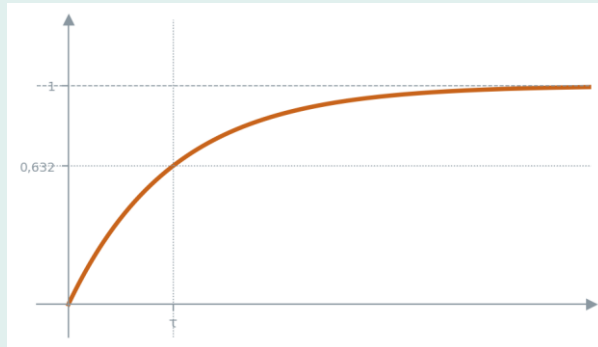
PROPRIÉTÉ — Propriétés de l'exponentielle

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 & e^1 &= e & e^{a+b} &= e^a \times e^b \\ e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} & e^{-a} &= \frac{1}{e^a} & (e^a)^b &= e^{ab} \end{aligned}$$

La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction exponentielle : pour $x > 0$, $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$.
De plus, pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$, et pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA

L'exponentielle décrit la réponse d'un système du premier ordre à un échelon : charge/décharge d'un condensateur, réponse d'un capteur de température, régulation de niveau... La sortie $s(t)$ d'un système du 1er ordre soumis à un échelon d'amplitude E s'écrit $s(t) = E(1 - e^{-(t/\tau)})$, où τ est la constante de temps.



EXERCICE — Simplifier

$$\ln(e^{-2}) \quad \ln(\sqrt{e}) \quad e^{2\ln(5)} \quad e^{\ln(4) + 2\ln(3)}$$

🔧 APPLICATION CIRA — Réponse d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre de constante de temps $\tau = 2 \text{ s}$ est soumis à un échelon d'amplitude $E = 10$. Sa réponse s'écrit $s(t) = 10(1 - e^{-t/2})$. Calculer $s(2)$ puis $s(6)$. Que vaut $s(t)$ quand t devient très grand ?

9. Comment résoudre une équation du type $a^x = b$?

MÉTHODE — Méthode : passer au log

Pour résoudre $a^x = b$ (avec $a > 0$), on prend le logarithme (népérien ou décimal) des deux membres : $x \times \ln(a) = \ln(b)$, d'où $x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

EXERCICE — Exemple guidé — réponse d'un système du 1er ordre

On reprend le système du premier ordre de la section précédente : $s(t) = 10(1 - e^{-t/2})$. On appelle temps de réponse à 95%, noté t_{95} , la durée au bout de laquelle $s(t)$ atteint 95% de sa valeur finale.

Résoudre $e^{-t/2} = 0,05$ pour déterminer t_{95} (on arrondira au dixième de seconde).

APPLICATION CIRA — Constante de temps à partir d'une mesure

Lors d'un essai indiciel, on mesure qu'un système du premier ordre atteint 63% de sa valeur finale au bout de 4 s. On rappelle que $s(\tau)/E = 1 - e^{-1} \approx 0,63$. En déduire la constante de temps τ du système, puis calculer son temps de réponse à 95% (on rappelle que $t_{95} \approx 3\tau$).

10. Fonctions circulaires

DÉFINITION — Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À tout réel t , on associe le point M du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}, \vec{OM})$ mesure t radians. On pose alors $\cos(t)$ = abscisse de M et $\sin(t)$ = ordonnée de M .

Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1; 1]$: pour tout t , $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(t) \leq 1$.

PROPRIÉTÉ — Périodicité et parité

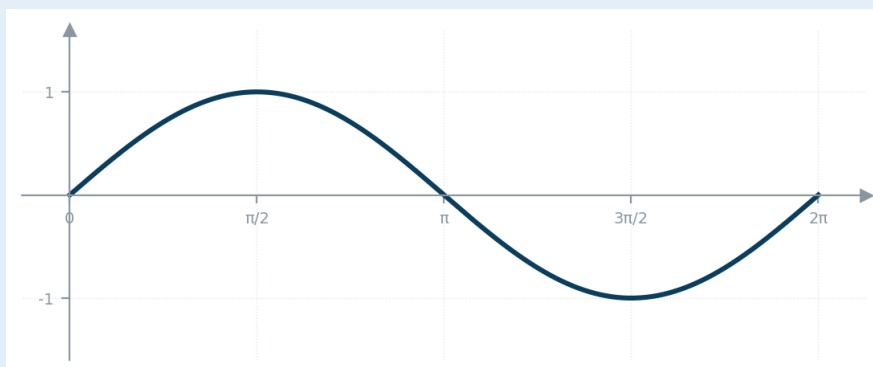
Périodicité : $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ et $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$. On peut donc réduire l'étude des courbes à un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$ ou $[0; 2\pi]$.

Parité : $\cos(-t) = \cos(t)$ — cos est une fonction paire (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). $\sin(-t) = -\sin(t)$ — sin est une fonction impaire (courbe symétrique par rapport à l'origine).

DÉFINITION — $f(x) = \sin(x)$

$$f(x) = \sin(x)$$

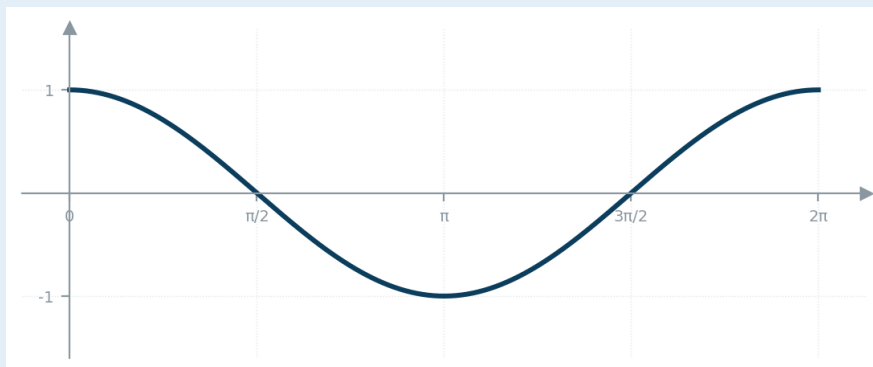
Domaine de définition : $\mathbb{R}$. Dérivée : $f'(x) = \cos(x)$. La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$.



DÉFINITION — $f(x) = \cos(x)$

$$f(x) = \cos(x)$$

Domaine de définition : $\mathbb{R}$. Dérivée : $f'(x) = -\sin(x)$. La fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

**MÉTHODE — Où ça sert en CIRA**

Le régime alternatif (tension du secteur, signaux de mesure alternatifs) se décrit par des fonctions sinusoïdales $u(t) = U_{\max} \cos(\omega t + \phi)$, avec $\omega = 2\pi/T$ la pulsation (en rad/s), T la période (en s) et ϕ la phase à l'origine. C'est la base de l'analyse des signaux en régime sinusoïdal établi.

EXERCICE — Compléter les tableaux de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin(x)									

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos(x)									

🔑 APPLICATION CIRA — Lecture d'un signal sinusoïdal

Une tension sinusoïdale s'écrit $u(t) = 230\sqrt{2} \times \cos(\omega t)$ avec une fréquence $f = 50$ Hz ($\omega = 2\pi f$). Calculer ω , la période T , puis la valeur de $u(t)$ à l'instant $t = 5$ ms.