

Fonctions usuelles

Lire, calculer et interpréter les modèles rencontrés en instrumentation, régulation et traitement du signal.

Commence chaque bloc par le mini-positionnement. Cherche sans aide, ouvre un indice en cas de blocage, puis utilise le corrigé pour contrôler méthode, unités et vraisemblance.

Socle

Consolidation

Approfondissement

Défi CIRA

Calculatrice autorisée. Un technicien prépare la saisie, choisit le bon mode, conserve assez de chiffres et interprète l'affichage dans le contexte physique.

0. Choisir son parcours

Un document commun, des points d'entrée différents

Comment utiliser les niveaux ?

Une notion est fragile

Commencer au Socle, puis poursuivre en Consolidation.

La notion est maîtrisée

Valider le mini-positionnement, puis aller à l'Approfondissement ou au Défi CIRA.

Ces balises indiquent le rôle de l'activité, pas la valeur de l'étudiant.

Le contrôle technicien

Après un calcul, vérifier autant que possible : domaine, signe, unité, ordre de grandeur, sens de variation, valeur initiale, valeur finale et cohérence physique.

1. Lire et décrire une fonction

Avant de calculer, comprendre ce que relie le modèle

Vocabulaire indispensable

Une fonction associe à chaque valeur admissible x une unique valeur $f(x)$. $f(2)$ est l'**image** de 2. Résoudre $f(x) = 5$, c'est chercher les **antécédents** de 5.

Domaine mathématique

Valeurs pour lesquelles la formule existe.

Domaine physique

Valeurs possibles dans la situation : temps, pression, fréquence...

Exemple : $1/f$ existe mathématiquement pour $f \neq 0$, mais une fréquence physique vérifie généralement $f > 0$.

Mini-positionnement

Pour $g(x) = 2x + 1$, calculer $g(3)$, puis résoudre $g(x) = 9$. Deux réponses justes : passer à 1.2.

Socle 1.1

Images, antécédents et domaine

On considère $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

1. Calculer $f(1)$, $f(5)$ et $f(10)$.
2. Résoudre $f(x) = 3$.
3. Donner le domaine mathématique de f .

Consolidation 1.2

Lire un tableau de mesures

Pression p (bar)	0	2	5	8
Tension $U(p)$ (V)	0,5	1,5	3,0	4,5

Lire $U(5)$, donner un antécédent de 1,5 V, puis décrire l'évolution de la tension.

2. Fonctions en escalier et échelon unité

Décrire des états, des commutations et des consignes

Fonction constante par intervalles

Une fonction en escalier prend une valeur constante sur chaque intervalle. Aux frontières, les crochets ou les points ouverts et fermés indiquent la valeur retenue.

Intervalle	$-7 \leq x \leq -4$	$-4 < x \leq 0$	$0 < x < 2$	$x \geq 2$
$f(x)$	2	-3	4	-1

Échelon unité

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad H(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau, \\ 1 & \text{si } t \geq \tau. \end{cases}$$

On utilise ici H pour éviter de confondre l'échelon avec la tension électrique U . Le signe « $t - \tau$ » correspond à un retard de τ .

Où cela sert en CIRA ?

Commande marche/arrêt, changement de consigne, chronogramme logique et modélisation de l'entrée d'un système dynamique.

Mini-positionnement

Donner $H(-2)$, $H(0)$ et $H(3 - 2)$. Tout juste : commencer à 2.2.

Socle 2.1

Tracer une fonction définie par intervalles

Tracer la fonction donnée par le tableau précédent. Préciser $f(-4)$, $f(0)$ et $f(2)$.

Superposer deux échelons

Étudier puis tracer $f(t) = 2H(t) - 3H(t - 1)$. Compléter d'abord les valeurs sur $t < 0$, $0 \leq t < 1$ et $t \geq 1$.

Commande tout-ou-rien

Un chauffage reçoit 10 V de $0 \leq t < 3$ min, 0 V de $3 \leq t < 8$ min, puis 10 V de $8 \leq t \leq 12$ min.

1. Tracer $s(t)$.
2. Écrire $s(t)$ avec des échelons.
3. Expliquer pourquoi une commande réelle utilise souvent une hystérésis autour de la consigne.

3. Fonction affine et étalonnage

Sensibilité, décalage et droite passant par deux points

Modèle $y = ax + b$

a est le coefficient directeur : $a = \Delta y / \Delta x$. Il représente souvent une sensibilité ou un gain et possède alors une unité.
 $b = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine, souvent appelée offset.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad b = y_A - ax_A, \quad f'(x) = a.$$

Si $a > 0$, la fonction est croissante ; si $a < 0$, elle est décroissante ; si $a = 0$, elle est constante.

Mini-positionnement

Pour $f(x) = -2x + 3$, donner $f(0)$, le sens de variation et l'unité de a si x est en bar et $f(x)$ en volts.

Tracer sans tableau exhaustif

Tracer $y = -x - 1$ et $y = 0,5x + 2$ en utilisant deux points par droite. Indiquer le sens de variation.

Défi CIRA 3.2**Étalonnage linéaire d'un capteur de pression**

Un capteur suit $U = ap + b$, avec U en volts et p en bar. On mesure 0,5 V à 0 bar et 4,5 V à 8 bar. Déterminer a , b , puis U à 5 bar.

Approfondissement 3.3**Retrouver une grandeur mesurée**

Avec le capteur précédent, on mesure $U = 3,8$ V. Déterminer la pression et vérifier la plage de mesure.

4. Fonction du second degré — rappel graphique

Relier l'expression du trinôme à sa parabole

Lire la forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

La courbe est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ et d'axe $x = \alpha$. Elle est tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.

Cette lecture complète la résolution et l'étude du signe vues au chapitre 1.

Consolidation 4.1**Sommet, variations et zéros**

Étudier $f(x) = (x - 2)^2 - 4$: sommet, axe, sens de variation et solutions de $f(x) = 0$.

Approfondissement 4.2**Identifier une parabole**

Sans développer, comparer les courbes de $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$ et $g(x) = -0,5(x + 1)^2 - 3$.

5. Fonction racine carrée

Un modèle croissant défini seulement pour une entrée non négative

Définition et propriétés

$f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$, croissante, et tend vers $+\infty$. C'est la fonction inverse de $x \mapsto x^2$ lorsque cette dernière est restreinte à $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{pour } x > 0.$$

La formule de la dérivée n'est pas définie en zéro : la fonction racine carrée n'y est pas dérivable.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour $a, b \geq 0$, mais en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Où cela sert en CIRA ?

À ouverture et fluide fixés, certains organes déprimogènes suivent le modèle simplifié $Q = k\sqrt{\Delta p}$, avec $\Delta p \geq 0$. On retrouve aussi la racine carrée dans la loi de Torricelli.

Mini-positionnement

Calculer $\sqrt{49}$, simplifier $\sqrt{50}$, puis résoudre $\sqrt{x} = 4$. Tout juste : passer à 5.2.

Socle 5.1

Valeur exacte, approximation et équation

a) Simplifier exactement $\sqrt{50}$. b) Calculer $\sqrt{4 \times 9}$. c) Résoudre $\sqrt{x} = 3$. d) Montrer avec $a = 9$, $b = 16$ que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Défi CIRA 5.2

Débit à travers une vanne

Dans des conditions fixées, $Q = 12\sqrt{\Delta p}$, avec Q en m^3/h et Δp en bar.

1. Calculer Q pour $\Delta p = 4$ bar.
2. Déterminer Δp pour $Q = 36 \text{ m}^3/\text{h}$.
3. Donner l'unité de la constante 12.

6. Fonction inverse

Quand l'augmentation d'une grandeur provoque la diminution d'une autre

Le modèle $f(x) = a/x$

Si $a \neq 0$, le domaine est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avec asymptotes $x = 0$ et $y = 0$.

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2}.$$

Si $a > 0$, f décroît sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Si $a < 0$, elle croît sur chacun de ces intervalles.

Au voisinage de zéro, il faut distinguer la gauche et la droite.

Où cela sert en CIRA ?

Réactance capacitive $X_C = 1/(2\pi fC)$, débit et temps de remplissage à volume constant, ou grandeurs inversement proportionnelles.

Consolidation 6.1

Calculer des limites correctement

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3/x$. La limite bilatérale en zéro existe-t-elle ?

Défi CIRA 6.2

Réactance capacitive d'un filtre

Pour $C = 100 \text{ nF}$, calculer $X_C = 1/(2\pi fC)$ à $f = 1 \text{ kHz}$, puis à 10 kHz . Arrondir à trois chiffres significatifs et commenter.

7. Fonctions ln, log et décibels

Transformer des produits en sommes et mesurer des rapports

Logarithme népérien

$\ln(x)$ est défini uniquement pour $x > 0$, croît sur $]0; +\infty[$, et $\ln'(x) = 1/x$.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a^p) = p \ln a \quad (a, b > 0).$$

$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$. Le logarithme décimal est $\log(x) = \ln(x)/\ln(10)$. Sur la calculatrice, les touches **ln** et **log** ne sont pas interchangeables.

Décibels

Pour des rapports positifs et sans unité :

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right), \quad G_{dB} = 10 \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right).$$

Mini-positionnement

Calculer $\ln(e^3)$, $\log(1000)$ et $\ln(6) - \ln(2)$. Tout juste : commencer à 7.2.

Consolidation 7.1

Simplifier et exprimer en fonction de $\ln 2$

a) $\ln 6 - \ln 2$; b) $\ln \sqrt{e}$; c) $\ln(1/2)$; d) $\ln 8$; e) $\ln(64e)$.

Défi CIRA 7.2

Gain en décibels d'un amplificateur

Un amplificateur reçoit $V_e = 20 \text{ mV}$ et délivre $V_s = 2 \text{ V}$. Calculer le gain en tension $G = V_s/V_e$, puis $G_{dB} = 20 \log(G)$.

Retrouver un rapport à partir des décibels

Un étage apporte un gain de 20 dB en tension. Calculer V_s/V_e . Même question pour -6 dB, au centième.

8. Fonction exponentielle et premier ordre

Décrire une évolution vers une valeur finale

Exponentielle

e^x est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$, croissante, avec $(e^x)' = e^x$. Les fonctions $\ln$ et exponentielle sont inverses :

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

$$e^{a+b} = e^a e^b, e^{a-b} = e^a / e^b, e^{-a} = 1/e^a.$$

Réponse indicielle d'un premier ordre

$$s(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad t \geq 0.$$

À $t = 0$
 $s(0) = 0$

À $t = \tau$
 $s(\tau) \approx 0,632E$

À $t = 3\tau$
 $s(3\tau) \approx 0,950E$

E est la valeur finale et τ , exprimée dans la même unité que t , est la constante de temps.

Simplifier

a) $\ln(e^{-2})$; b) $\ln(\sqrt{e})$; c) $e^{2\ln 5}$; d) $e^{\ln 4 + 2\ln 3}$.

Réponse d'un système du premier ordre

Un système a $\tau = 2$ s, $E = 10$, et $s(t) = 10(1 - e^{-t/2})$. Calculer $s(0)$, $s(2)$, $s(6)$, puis la valeur finale.

9. Résoudre une équation exponentielle

Passer au logarithme et interpréter le temps obtenu

Équation $a^x = b$

Pour $a > 0$, $a \neq 1$ et $b > 0$, prendre le logarithme des deux membres donne :

$$x \ln a = \ln b \quad \implies \quad x = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Si $b \leq 0$, l'équation n'a pas de solution réelle. Si $a = 1$, il faut traiter séparément $1^x = b$.

Consolidation 9.1

Temps de réponse à 95 %

Pour le système précédent, résoudre $e^{-t/2} = 0,05$. Arrondir au dixième de seconde.

Défi CIRA 9.2

Constante de temps issue d'une mesure

Lors d'un essai indicel, la sortie atteint 63 % de sa valeur finale après 4 s. Déduire τ , puis estimer t_{95} .

Approfondissement 9.3

Temps de franchissement d'un seuil

Une température suit $T(t) = 80 - 60e^{-t/5}$, en °C. Déterminer quand elle atteint 68 °C.

10. Fonctions circulaires et signaux sinusoïdaux

Relier cercle, radians, période et pulsation

Sinus et cosinus

Sur le cercle trigonométrique, $\cos x$ est l'abscisse et $\sin x$ l'ordonnée. Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1; 1]$, et de période 2π .

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Elles n'ont pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$, car elles oscillent.

Degrés, radians et valeurs remarquables

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1

Signal sinusoïdal

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}.$$

f s'exprime en hertz, T en secondes, ω en radians par seconde et φ en radians.

Mini-positionnement

Convertir 90° en radians, donner $\sin(\pi/2)$, puis calculer la période d'un signal à 50 Hz.

Socle 10.1

Compléter les valeurs remarquables

Sans calculatrice, restituer les lignes sinus et cosinus du tableau. Vérifier ensuite la cohérence des signes sur le cercle.

Lecture d'un signal sinusoïdal

Une tension s'écrit $u(t) = 230\sqrt{2} \cos(\omega t)$, avec $f = 50 \text{ Hz}$ et $\omega = 2\pi f$.

1. Calculer ω et T .
2. Calculer $u(5 \text{ ms})$.
3. Donner la valeur maximale et la valeur efficace.

Amplitude, période et phase

Pour $s(t) = 4 \cos(200\pi t + \pi/3)$, déterminer amplitude, pulsation, fréquence, période et phase initiale.

Application finale — Synthèse CIRA

De la température au signal de commande

Chaîne de mesure d'un procédé thermique

Situation — Après un échelon de chauffage, la température suit $T(t) = 80 - 60e^{-t/5}$, avec T en $^{\circ}\text{C}$ et t en secondes. Un transmetteur 4–20 mA étalonné de 0 à 100 $^{\circ}\text{C}$ suit $I = 0,16T + 4$, avec I en mA. Une alarme passe à 10 V dès que $T \geq 68^{\circ}\text{C}$.

1. Déterminer la température initiale et la valeur finale.
2. Calculer $T(5)$ et interpréter le rôle de $\tau = 5 \text{ s}$.
3. Déterminer le temps exact puis approché auquel 68 $^{\circ}\text{C}$ sont atteints.
4. Écrire la tension d'alarme avec un échelon H .
5. Calculer le courant transmis au moment du déclenchement.
6. Contrôler domaine, unités, plage 4–20 mA et cohérence de l'ensemble.