

Fonctions tangente et arctangente

Relier un rapport à un angle pour étudier une pente, un déphasage et bientôt l'argument d'un nombre complexe.

Commence chaque partie par le mini-positionnement. Cherche sans aide, puis ouvre un indice ou le corrigé pour vérifier la méthode, le mode angulaire, les unités et la cohérence.

Socle

Consolidation

Approfondissement

Défi CIRA

Réflexe calculatrice : les formules du chapitre utilisent les radians. La touche $\tan^{-1}$ désigne généralement arctan, pas $1/\tan$.

0. Choisir son parcours

Un document commun, plusieurs points d'entrée

Comment utiliser les niveaux ?

Tu hésites sur les radians

Commence par le Socle, puis poursuis en Consolidation.

Tu maîtrises déjà

Valide le mini-positionnement et rejoins l'Approfondissement ou le Défi CIRA.

Le contrôle technicien

Pour chaque résultat angulaire, vérifier le mode de la calculatrice, l'unité, le quadrant, l'intervalle demandé et la cohérence avec les valeurs limites.

1. Radians, rapports et calculatrice

Préparer les automatismes indispensables

Degrés et radians

$$180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad \theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \frac{\pi}{180}, \quad \theta_{\text{deg}} = \theta_{\text{rad}} \frac{180}{\pi}.$$

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Mini-positionnement

Convertir 45° et 120° en radians, puis $\pi/6$ en degrés. Tout juste : commencer à 1.2.

Socle 1.1

Conversions angulaires

Convertir : a) 30° ; b) 135° ; c) $3\pi/4$ rad ; d) 2,2 rad au degré près.

Consolidation 1.2

Diagnostiquer le mode de la calculatrice

Une calculatrice affiche $\tan(45) = 1$. Dans quel mode est-elle ? Que devrait-on saisir pour obtenir ce même résultat en mode radians ?

2. La fonction tangente

Quotient, valeurs interdites, période et branches

Définition et domaine

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Le quotient existe lorsque $\cos(x) \neq 0$. Ainsi :

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Périodicité, parité et variations

$$\tan(x + \pi) = \tan(x), \quad \tan(-x) = -\tan(x), \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Sur chaque intervalle $] -\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[$, la tangente est strictement croissante. Les droites $x = \pi/2 + k\pi$ sont des asymptotes verticales.

Sur la branche principale :

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty.$$

Mini-positionnement

Calculer $\tan(\pi/4)$, dire si $\tan(\pi/2)$ existe, puis donner $\tan(5\pi/4)$. Tout juste : commencer à 2.2.

Calculer et résoudre sur la branche principale

Calculer $\tan(\pi/4)$ et $\tan(\pi/3)$, puis résoudre $\tan(x) = 1$ sur $] -\pi/2; \pi/2[$.

Lire la courbe

1. Donner les asymptotes qui encadrent la branche contenant zéro.
2. Donner les zéros de la tangente.
3. Expliquer pourquoi la tangente n'est pas croissante sur tout son domaine, bien qu'elle soit croissante sur chaque branche.

Étudier $g(x) = \tan(x) - x$

Sur $] -\pi/2; \pi/2[$:

1. Montrer que $g'(x) = \tan^2 x$.
2. Étudier les variations de g .
3. À partir de $g(0)$, déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; \pi/2[$.

3. La fonction arctangente

Retrouver l'angle principal associé à un rapport

Pourquoi restreindre la tangente ?

La tangente complète est périodique : un même nombre possède une infinité d'antécédents. Sur $] -\pi/2; \pi/2[$, elle est strictement croissante et prend toutes les valeurs réelles. Sa fonction réciproque est $\arctan$.

$$y = \arctan(x) \iff x = \tan(y), \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Les courbes de la tangente restreinte et de l'arctangente sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Propriétés

$$\arctan(-x) = -\arctan(x), \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'arctangente est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $] -\pi/2; \pi/2[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Attention à deux confusions

$\arctan(x) \neq 1/\tan(x)$. Sur une calculatrice, la fonction peut être notée $\tan^{-1}$. Par ailleurs, $\arctan(y/x)$ ne détermine pas toujours le bon quadrant d'un argument complexe ; il faut tenir compte des signes ou employer $\text{atan2}(y, x)$.

Mini-positionnement

Donner $\arctan(0)$, $\arctan(1)$ et le signe de $\arctan(-3)$. Tout juste : commencer à 3.2.

Socle 3.1

Valeurs exactes et approximations

Calculer exactement : a) $\arctan(0)$; b) $\arctan(1)$; c) $\arctan(\sqrt{3})$; d) $\arctan(-1)$. Donner aussi les valeurs en degrés.

Consolidation 3.2

Encadrer avant de calculer

Sans calculatrice, encadrer $\arctan(0,5)$ entre deux angles remarquables. Vérifier ensuite au centième de radian et au degré près.

Approfondissement 3.3

Quadrants et argument

Les nombres complexes $z_1 = 1 + j$ et $z_2 = -1 - j$ donnent tous deux $y/x = 1$. Montrer que $\arctan(y/x)$ ne suffit pas à distinguer leurs arguments.

4. Dériver une arctangente composée

Appliquer la chaîne sans perdre le domaine initial

Formule

Si u est dérivable sur son domaine :

$$(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}.$$

Le dénominateur $1 + u(x)^2$ est strictement positif. Le signe de la dérivée est donc celui de $u'(x)$, mais le domaine reste celui de la fonction initiale.

Socle 4.1

Dériver $f(x) = \arctan(2x)$

Préciser le domaine, identifier $u(x)$, puis calculer $f'(x)$.

Consolidation 4.2

Dériver $g(x) = \arctan(x^2)$

Calculer $g'(x)$, puis déterminer les variations de g .

Approfondissement 4.3

Dériver $h(x) = \arctan(1/x)$

Préciser le domaine, calculer la dérivée et expliquer pourquoi la valeur $x = 0$ reste interdite après simplification.

5. Résoudre une équation avec tangente

Trouver la solution principale, puis utiliser la période

Méthode générale

Pour tout réel a , l'équation $\tan(x) = a$ possède une unique solution sur $] -\pi/2; \pi/2[$:

$$x_0 = \arctan(a).$$

Sur $\mathbb{R}$, la période π donne toutes les solutions :

$$x = \arctan(a) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mini-positionnement

Résoudre $\tan x = 1$ sur la branche principale, puis sur $\mathbb{R}$.

Consolidation 5.1

Résoudre deux équations remarquables

Résoudre sur $] -\pi/2; \pi/2[$, puis sur $\mathbb{R}$:

a) $\tan x = 1$; b) $\tan x = \sqrt{3}$.

Consolidation 5.2

Résoudre avec une valeur approchée

Résoudre sur $] -\pi/2; \pi/2[$: $2 \tan x - 1 = 0$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 rad près.

Consolidation 5.3

Résoudre avec un second membre négatif

Résoudre $\tan x = -1$ sur $] -\pi/2; \pi/2[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Sélectionner les solutions sur un intervalle

Résoudre $\tan x = 1$ sur $[0; 2\pi]$.

6. Déphasage d'un filtre RL passe-bas

Une application centrale de l'arctangente en CIRA

Modèle

La sortie est prise aux bornes de la résistance $R > 0$. Avec $L > 0$ et $\omega \geq 0$:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega}, \quad \omega_0 = \frac{R}{L}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Dans ce cas, le quadrant est connu et la phase appartient à $] -\pi/2; 0]$.

Étude symbolique de la phase

1. Justifier que φ est décroissante sur $[0; +\infty[$.
2. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(\omega_0)$ et $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega)$.
3. Dresser le tableau de variations.

Exploitation numérique

On prend $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $L = 100 \text{ mH}$.

1. Calculer $\omega_0 = R/L$, puis $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.
2. Calculer la phase pour $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega = 10\omega_0$, en degrés.
3. Contrôler l'évolution obtenue.

Application finale — Synthèse CIRA

Identifier une fréquence à partir d'un déphasage

Défi CIRA S

Réglage et contrôle d'un filtre RL

Situation — Le filtre précédent possède $R = 1,0 \text{ k}\Omega$, $L = 100 \text{ mH}$ et $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_0)$.

1. Retrouver ω_0 et f_0 .
2. Un essai donne $\varphi = -30^\circ$. Convertir cet angle en radians puis déterminer ω et f .
3. Reprendre le calcul pour $\varphi = -60^\circ$.
4. Comparer les deux fréquences à f_0 .
5. Expliquer pourquoi -100° est impossible avec ce modèle.
6. Effectuer les contrôles de mode, d'unité, de signe et de valeur limite.