

OUVERTURE — Pourquoi ce chapitre ?

Un système physique n'atteint jamais son objectif instantanément : la tension aux bornes d'un condensateur qui se charge, la vitesse d'un moteur qui démarre, le gain d'un filtre selon la fréquence — toutes ces grandeurs évoluent vers une valeur limite, ou se comportent différemment selon qu'on s'approche d'un point particulier ou qu'on s'éloigne à l'infini. La notion de limite formalise mathématiquement cette idée de comportement asymptotique. Ce chapitre reprend et prolonge les fonctions étudiées jusqu'ici (chapitre 05 en particulier) pour apprendre à calculer et interpréter ces limites, avec des exercices gradués : certains sont accessibles dès les premiers automatismes, d'autres demandent une maîtrise plus complète des fonctions de référence.

1. Limite en un point**DÉFINITION — Limite en un point**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a (sauf peut-être en a), et L un réel. On dit que f a pour **limite** L en a , et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

lorsque $f(x)$ se rapproche autant que l'on veut de L dès que x se rapproche suffisamment de a . Si f est définie et continue en a (c'est le cas de toutes les fonctions usuelles sur leur domaine), il suffit de **remplacer x par a** dans l'expression de f .

Lorsque la fonction n'est définie que d'un côté de a , ou que son comportement diffère selon le sens d'approche, on précise le sens avec un exposant : $x \rightarrow a^+$ (a par valeurs supérieures) ou $x \rightarrow a^-$ (a par valeurs inférieures).

EXERCICE — Calculer une limite par substitution directe · Socle

Ces trois fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$: la limite s'obtient en remplaçant simplement x par la valeur donnée. Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 - 3x + 4$

EXERCICE — Une limite en un point où le dénominateur s'annule · Consolidation

Ici, la fonction n'est pas définie au point visé : il faut regarder ce qui se passe de chaque côté.

1. On considère $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$. Que peut-on en conclure sur la courbe de f ?
2. On considère $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ (le résultat est-il le même des deux côtés de 0 ?).

REMARQUE — Vigilance — le signe dépend de la puissance au dénominateur

Pour $1/(x - 3)$, le signe du résultat change selon le sens d'approche (dénominateur à la puissance 1, qui change de signe en passant par 0). Pour $1/x^2$, le dénominateur reste toujours positif (carré), donc la limite est la même des deux côtés : $+\infty$. Quand une limite en un point est infinie, la courbe de f admet une **asymptote verticale** en ce point.

2. Limites de référence en $+\infty$ et $-\infty$ **DÉFINITION — Limites usuelles des fonctions de référence**

Fonction	Limite en $+\infty$	Limite en $-\infty$
x^n (n pair)	$+\infty$	$+\infty$
x^n (n impair)	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$)	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	(domaine $x \geq 0$)
e^x	$+\infty$	0
$\ln(x)$	$+\infty$	(domaine $x > 0$)

Ces résultats sont à connaître par cœur : ils servent de brique de base à toutes les limites plus complexes du chapitre.

EXERCICE — Limites de référence, applications directes · Socle

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

REMARQUE — Piège fréquent — la parité de l'exposant change tout en $-\infty$

En $+\infty$, x^n tend toujours vers $+\infty$. En $-\infty$ en revanche, tout dépend de la parité de n : $(-2)^4$ est positif mais $(-2)^5$ est négatif. Avant de conclure une limite en $-\infty$, vérifier systématiquement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$.

EXERCICE — Limites de référence, suite · Consolidation

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^2$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA — valeur finale et régime permanent

La réponse d'un système du premier ordre soumis à un échelon s'écrit typiquement $s(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ pour $t \geq 0$, où E est la valeur finale visée et τ la constante de temps. Le comportement de $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$ correspond au régime permanent (ou établi) du système, une fois les phénomènes transitoires terminés.

APPLICATION CIRA — Valeur finale d'un système du premier ordre · Défi CIRA

Un système du premier ordre a pour réponse indicielle, pour $t \geq 0$:

$$s(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

avec $E = 10 \text{ V}$ et $\tau = 2 \text{ s}$.

1. Calculer $s(0)$. Que représente cette valeur ?
2. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$. Que représente cette limite pour le système ? Comparer à la valeur de E .

3. Opérations sur les limites — somme et produit

DÉFINITION — Limite d'une somme

lim f	lim g	lim (f + g)
L (fini)	L' (fini)	$L + L'$
L (fini)	$+\infty$	$+\infty$
L (fini)	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée (FI)

DÉFINITION — Limite d'un produit

lim f	lim g	lim (f × g)
L (fini)	L' (fini)	$L \times L'$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	Forme indéterminée (FI)

Règle de signe habituelle pour un produit de limites infinies (comme pour les nombres relatifs) : deux signes identiques donnent $+\infty$, deux signes opposés donnent $-\infty$.

EXERCICE — Sommes et produits sans forme indéterminée · Socle

Dans chaque cas, identifier la limite de chaque terme puis conclure — aucune de ces limites n'est une forme indéterminée.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 2$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + x^2$

EXERCICE — Produits — attention aux signes · Consolidation

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 4)(e^x - 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 1)e^x$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)x^3$

MÉTHODE — Lever une forme indéterminée « $\infty - \infty$ »

Quand une somme ou une différence conduit à $\infty - \infty$, on ne peut pas conclure directement : il faut transformer l'écriture, en général en **factorisant par le terme dominant** (celui qui l'emporte le plus vite à l'infini).

Exemple : pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^4$, on factorise par x^4 (le terme dominant) :

$$x^2 - x^4 = x^4(1/x^2 - 1)$$

Or $1/x^2 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc la parenthèse tend vers -1 : on est ramené à un produit $x^4 \times (-1)$, qui n'est plus une forme indéterminée.

EXERCICE — Une vraie forme indéterminée : $\infty - \infty$ · Approfondissement

En factorisant par le terme dominant comme dans la méthode ci-dessus, déterminer :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^4$

PROPRIÉTÉ — Croissances comparées (résultats admis)

À l'infini, l'exponentielle « écrase » toujours les puissances de x , qui elles-mêmes écrasent le logarithme. On admet en particulier :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Ces trois résultats permettent de lever directement des formes indéterminées « $0 \times \infty$ » qui apparaissent très souvent dès qu'une exponentielle ou un logarithme est multiplié par une puissance de x .

EXERCICE — Appliquer les croissances comparées · Défi CIRA

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x}$ (indication : poser $u = -x$ et se ramener au premier résultat admis ci-dessus).
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)$ directement à l'aide du deuxième résultat admis.

4. Opérations sur les limites — inverse et quotient**DÉFINITION — Limite d'un inverse et d'un quotient**

$\lim f$	$\lim (1/f)$
L (fini, $\neq 0$)	$1/L$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$+\infty$ ou $-\infty$	0

$\lim f$	$\lim g$	$\lim (f / g)$
L (fini)	L' (fini, $\neq 0$)	L / L'
L (fini, $\neq 0$)	0	$\pm\infty$ (selon les signes)
L (fini)	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	L' (fini, $\neq 0$)	$\pm\infty$ (selon les signes)
0	0	Forme indéterminée (FI)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	Forme indéterminée (FI)

EXERCICE — Limite d'un inverse · Socle

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/(x^2 + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/\ln(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/(e^x + 4)$

EXERCICE — Quotient : un cas non indéterminé · Consolidation

Dans les deux cas suivants, le numérateur et le dénominateur ont des limites différentes (l'une infinie, l'autre finie non nulle, ou l'inverse) : il ne s'agit donc pas d'une forme indéterminée, mais il faut bien suivre les signes.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-4}{x}$

MÉTHODE — Lever une forme indéterminée « 0 / 0 » par factorisation

Quand un quotient conduit à 0/0 au voisinage d'un point a , c'est en général que $(x - a)$ est un facteur commun au numérateur et au dénominateur. On factorise, on simplifie ce facteur (valable pour $x \neq a$, ce qui suffit puisqu'on étudie une limite), puis on remplace x par a dans l'expression simplifiée.

EXERCICE — Une vraie forme indéterminée : 0 / 0 · Approfondissement

On considère $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

1. Vérifier que le numérateur et le dénominateur s'annulent tous les deux en $x = 2$ (forme 0/0).
2. Factoriser le numérateur, simplifier par $(x - 2)$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

5. Limites de fonctions composées**MÉTHODE — Limite d'une fonction composée**

Pour calculer la limite d'une composée $v \circ u$ en un point a , on procède en deux temps : on pose $X = u(x)$, on détermine vers quelle valeur (ou vers quel infini) tend X quand x tend vers a , puis on applique la limite de v en cette valeur.

Exemple : pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+3}$, on pose $X = x + 3$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $X \rightarrow -\infty$, et $e^X \rightarrow 0$ (limite de référence). Donc la limite cherchée est 0.

EXERCICE — Limite d'une composée, cas simples · Socle

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+3}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x + 1)$

EXERCICE — Limite d'une composée, suite · Consolidation

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 2)e^{-2x}$

EXERCICE — Limite d'une composée avec puissance · Approfondissement

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x - 3)^3$

MÉTHODE — Où ça sert en CIRA — atténuation d'un filtre passe-bas

Le module du gain d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit $G(\omega) = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$, où G_0 est le gain

statique et ω_0 la pulsation de coupure. Le comportement de cette expression quand ω tend vers 0 puis vers $+\infty$ décrit exactement ce que fait le filtre : laisser passer les basses fréquences, atténuer les hautes fréquences.

APPLICATION CIRA — Comportement asymptotique d'un filtre passe-bas · Défi CIRA

On considère le gain d'un filtre passe-bas du premier ordre :

$$G(\omega) = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

1. Déterminer $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega)$ (poser d'abord la limite de $(\omega/\omega_0)^2$).
2. Déterminer $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega)$.
3. Interpréter chacun de ces deux résultats en termes de comportement du filtre (gain statique, atténuation).

6. Polynômes et fractions rationnelles à l'infini

DÉFINITION — Limite d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle à l'infini

Au voisinage de l'infini, **un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré**, et **une fraction rationnelle a la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré**. Ce résultat découle directement de la méthode de factorisation par le terme dominant vue en section 3 : par exemple,

$$x^4 + 3x^2 + 2x + 11 = x^4(1 + 3/x^2 + 2/x^3 + 11/x^4)$$

et chaque terme entre parenthèses tend vers 0 sauf le « 1 », si bien que le polynôme se comporte, à l'infini, exactement comme x^4 .

EXERCICE — Limite d'un polynôme à l'infini · Socle

En identifiant le terme de plus haut degré, déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + 3x^2 + 2x + 11$

EXERCICE — Limite d'une fraction rationnelle à l'infini · Consolidation

En identifiant le quotient des termes de plus haut degré, déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5}{-3x + 12}$

EXERCICE — Même fonction, l'autre limite · Approfondissement

On reprend la fonction de l'exercice précédent. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5}{-3x + 12}$

2. Comparer avec le résultat de l'exercice précédent : le signe du résultat change-t-il ? Expliquer pourquoi en observant le signe du terme dominant du quotient.

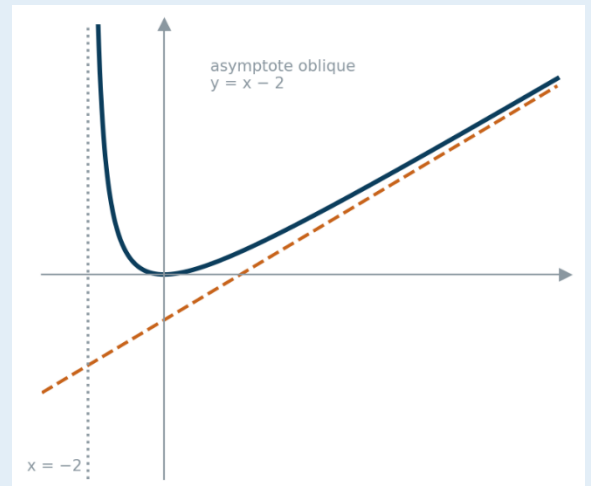
DÉFINITION — Exemple guidé complet — asymptote oblique

On considère la fonction définie sur $(-2 ; +\infty)$ par

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+2}.$$

1. Quand $x \rightarrow -2^+$, $x + 2 \rightarrow 0^+$, donc $4/(x + 2) \rightarrow +\infty$ et $x - 2 \rightarrow -4$ (fini) : la somme tend donc vers $+\infty$. La droite d'équation $x = -2$ est **asymptote verticale** à la courbe.

2. Quand $x \rightarrow +\infty$, $4/(x + 2) \rightarrow 0$. Autrement dit, $f(x) - (x - 2) \rightarrow 0$: la courbe de f se rapproche indéfiniment de la droite d'équation $y = x - 2$, sans jamais forcément la toucher. Cette droite est **asymptote oblique** à la courbe en $+\infty$.



Application finale — Synthèse CIRA

APPLICATION CIRA — Étude complète d'un écart de réglage

Un correcteur est réglé de sorte que l'écart entre la consigne et la mesure, pour $t \geq 0$ (t en secondes), suive :

$$e(t) = (1 + 4t)e^{-2t}$$

1. Calculer $e(0)$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t)$ (indication : écrire $e(t) = e^{-2t} + 4t \cdot e^{-2t}$ et utiliser les croissances comparées de la section 3). Interpréter ce résultat : que dit-il de la qualité du réglage à long terme ?

2. Calculer $e'(t)$ (dérivée d'un produit, avec une fonction composée). Montrer que $e'(t) = 2e^{-2t}(1 - 4t)$.

3. Étudier le signe de $e'(t)$ sur $(0 ; +\infty)$ et en déduire le tableau de variation de e . En quelle valeur de t le maximum est-il atteint ? Calculer ce maximum (c'est le dépassement du correcteur).

4. Calculer $e'(0)$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, et interpréter sa pente comme la vitesse initiale de correction.

