

OUVERTURE — Pourquoi ce chapitre ?

La puissance électrique consommée, la charge accumulée dans un condensateur, la tension moyenne délivrée par un redresseur, la valeur efficace d'un courant sinusoïdal : toutes ces grandeurs que mesure ou règle un technicien s'obtiennent en « cumulant » une fonction du temps sur un intervalle. C'est exactement ce que fait le calcul intégral, opération inverse de la dérivation étudiée aux chapitres précédents. Ce chapitre part des primitives, définit l'intégrale et l'aire qu'elle représente, puis l'applique aux deux notions les plus utilisées en instrumentation et régulation : la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Exercices gradués : certains sont accessibles dès les premiers automatismes de calcul, d'autres demandent une maîtrise plus complète des fonctions de référence.

1. Primitives

DÉFINITION — Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable sur I vérifiant :

$$F'(x) = f(x)$$

Si f admet une primitive F , alors toutes les primitives de f sont les fonctions de la forme $F(x) + k$, où k est un réel quelconque (deux primitives d'une même fonction diffèrent toujours d'une constante).

Conséquence utile en pratique : si l'on impose une **condition initiale** (une valeur précise y_0 en un point x_0), il existe une **unique** primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$ — c'est exactement le principe utilisé pour retrouver une charge électrique ou une position à partir d'une vitesse, une fois connue leur valeur à un instant donné.

DÉFINITION — Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Domaine
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 1$ entier)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$1/x^2$	$-1/x$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$1/x$	$\ln(x)$	$]0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Comme pour les dérivées, ce tableau se lit dans les deux sens : reconnaître une primitive, c'est reconnaître que sa dérivée redonne la fonction de départ.

EXERCICE — Primitives immédiates · Socle

En utilisant directement le tableau ci-dessus, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = 4$
- $f(x) = x^3$
- $f(t) = t^5$

EXERCICE — Combiner plusieurs termes (linéarité) · Consolidation

La primitive d'une somme est la somme des primitives, et un facteur constant se conserve. Déterminer une primitive de :

1. $f(x) = x^2 - 3x$

2. $g(x) = 5x^3$

2. Opérations sur les primitives**DÉFINITION — Primitives de fonctions composées de forme $u' \times g(u)$**

Beaucoup de fonctions rencontrées en pratique s'écrivent comme le produit de la dérivée u' d'une fonction u par une expression construite sur u elle-même. Trois formes reviennent constamment (n entier relatif, $n \neq -1$) :

Forme de f	Une primitive F	Condition
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u strictement positive si $n < 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u ne s'annule pas
$u'e^u$	e^u	aucune

Complément (très utile en électricité pour un signal sinusoïdal), avec ω et ϕ réels, $\omega \neq 0$:

Fonction f	Une primitive F
$\cos(\omega t + \phi)$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \phi)$
$\sin(\omega t + \phi)$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \phi)$

MÉTHODE — Repérer la forme $u' \times g(u)$

Face à une fonction à primitiver, la question à se poser est toujours la même : « existe-t-il une fonction u , visible dans l'expression, dont je reconnais aussi la dérivée u' en facteur ? ». Il faut être vigilant sur le **facteur constant** : si seul $k \cdot u'$ apparaît (avec $k \neq 1$), on ajuste en divisant la primitive trouvée par k .

Exemple : pour $f(t) = e^{\omega t}$, on pose $u(t) = \omega t$, donc $u'(t) = \omega$. La fonction s'écrit $f(t) = \frac{1}{\omega} \cdot \omega \cdot e^{\omega t}$, soit $1/\omega$ fois la forme $u'e^u$: une primitive est donc $F(t) = \frac{1}{\omega} e^{\omega t}$.

EXERCICE — Forme $u'e^u$ · Consolidation

1. $f(t) = 2te^{t^2}$ (poser $u(t) = t^2$)

2. $f(t) = e^{3t}$ (même principe que dans la méthode ci-dessus, avec $\omega = 3$)

EXERCICE — Forme u'/u · Approfondissement

1. $f(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$

2. En déduire une primitive de $g(t) = \frac{2t}{(t^2 + 1)^2}$ (indication : ici c'est la forme $u'u^n$ avec $n = -2$ qu'il faut reconnaître, pas u'/u).

REMARQUE — Vigilance — bien identifier n avant de choisir la formule

Une fraction ne relève pas forcément de la forme u'/u : $2t/(t^2 + 1)^2$ s'écrit aussi $2t \cdot (t^2 + 1)^{-2}$, c'est-à-dire $u'u^n$ avec $u(t) = t^2 + 1$ et $n = -2$ (exposant négatif, $\neq -1$, donc la formule u'/u ne s'applique pas ici). Toujours vérifier si l'exposant du dénominateur vaut exactement 1 ($\rightarrow u'/u$, primitive en $\ln$) ou une autre valeur ($\rightarrow u'u^n$).

🔧 APPLICATION CIRA — Primitive d'un courant sinusoïdal — charge électrique · Défi CIRA

Un courant électrique dans un circuit s'écrit, pour $t \geq 0$:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $I_0 = 0,5 \text{ A}$, $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$ et $\varphi = 0$. La charge électrique $q(t)$ qui traverse une section du circuit est une primitive du courant : $q'(t) = i(t)$.

1. À l'aide du tableau de compléments ci-dessus, déterminer la forme générale des primitives de i .
2. On impose la condition initiale $q(0) = 0$ (aucune charge accumulée à l'instant initial). En déduire l'expression complète de $q(t)$.
3. Calculer $q(0,005)$ — soit un quart de période du signal — arrondi à 10^{-4} près, et interpréter le signe du résultat.

3. Intégrale d'une fonction

DÉFINITION — Intégrale de a à b

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , F une primitive de f sur I , et a, b deux réels de I . On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre réel noté :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Méthode de calcul : on détermine une primitive F de f , on note l'étape intermédiaire avec la notation « crochet », puis on calcule la différence :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

La variable t est dite **muette** : elle disparaît une fois le calcul terminé et peut être remplacée par n'importe quel autre nom, ce qui ne change pas le résultat :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

EXERCICE — Calculs d'intégrales directs · Socle

Déterminer une primitive puis calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_0^3 4 dt$
2. $\int_1^2 (x^2 + 1) dx$
3. $\int_1^e \frac{1}{t} dt$

PROPRIÉTÉ — Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles, valable quels que soient a, b, c dans I :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

Linéarité, pour α et β réels :

$$\int_a^b (\alpha f) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt$$

Positivité : si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$. Plus généralement, si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f dt \leq \int_a^b g dt$: comparer deux fonctions permet de comparer leurs intégrales, sans les calculer.

EXERCICE — Utiliser Chasles et la linéarité · Consolidation

On donne $\int_0^2 f(t) dt = 5$ et $\int_2^5 f(t) dt = -3$.

1. En déduire $\int_0^5 f(t) dt$.
2. Sachant de plus que $\int_0^2 g(t) dt = 4$, calculer $\int_0^2 (3f - 2g) dt$.

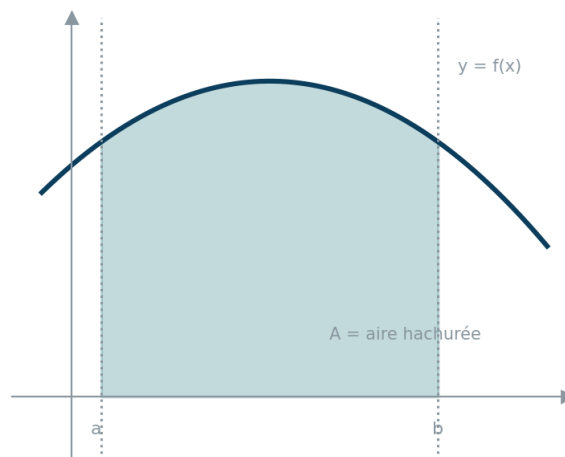
4. Interprétation graphique : calcul d'aires

THÉORÈME — Aire sous une courbe — fonction positive

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a ; b]$. L'aire A du domaine délimité par la courbe C d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(t) dt$$

L'aire est exprimée en « unités d'aire » (u.a.), qui dépendent des longueurs choisies comme unités sur les deux axes.



EXERCICE — Vérifier le théorème sur des cas géométriques simples · Socle

1. Soit f la fonction constante définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = 2$. Calculer l'aire du rectangle « sous la courbe » par la géométrie, puis vérifier en calculant $\int_0^2 f(t) dt$.
2. Soit g la fonction affine définie sur $[0 ; 5]$ par $g(x) = 2x + 1$. Calculer l'aire du trapèze « sous la courbe » par la géométrie, puis vérifier en calculant $\int_0^5 g(x) dx$.

EXERCICE — Aire sous une courbe · Consolidation

Déterminer la portion d'aire comprise entre la courbe de la fonction $f(x) = e^x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ (donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centième).

THÉORÈME — Aire sous une courbe — fonction négative

Soit f une fonction dérivable et négative sur un intervalle $[a ; b]$. L'aire A du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est cette fois :

$$A = - \int_a^b f(t) dt$$

(l'intégrale d'une fonction négative est un nombre négatif ; on prend son opposé pour obtenir une aire, toujours positive.)

EXERCICE — Aire sous une courbe, fonction négative · Approfondissement

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = -x^2$. Vérifier que f est négative sur cet intervalle, puis déterminer l'aire A du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$.

MÉTHODE — Aire entre deux courbes

Lorsque f et g sont deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a ; b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes (celle de g au-dessus, celle de f en dessous) vaut :

$$A = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt$$

(cette formule redonne le théorème précédent quand f est la fonction nulle).

EXERCICE — Aire entre deux courbes · Défi CIRA

On considère, sur $[0 ; 2]$, les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$. Vérifier que $f(x) \leq g(x)$ sur $[0 ; 2]$ (on pourra étudier le signe de $g(x) - f(x)$), puis calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes sur cet intervalle.

REMARQUE — Où ça sert en CIRA — mesurer une intégrale sans formule exacte

Un capteur ou un enregistreur numérique ne connaît une grandeur physique (puissance, débit...) qu'à des instants discrets échantillonnés — il ne « voit » jamais l'expression algébrique de la fonction. Un compteur d'énergie approche alors $\int_a^b p(t) dt$ par une somme de petits rectangles ou de trapèzes construits sur les mesures successives (méthodes des rectangles, du point-milieu, des trapèzes) : c'est le même principe géométrique — l'aire sous la courbe — mais calculé numériquement plutôt qu'avec une primitive.

5. Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal

DÉFINITION — Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a ; b]$, avec $a < b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ le nombre réel :

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Interprétation graphique : l'aire A du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de largeur $(b - a)$ et de hauteur f_{moy} — soit $A = f_{\text{moy}}(b - a)$. C'est le rectangle « de même aire » que la courbe.

EXERCICE — Valeur moyenne d'une fonction · Socle

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0 ; 1]$.

🔧 APPLICATION CIRA — Valeur moyenne d'un signal redressé · Consolidation

Un redresseur simple alternance transforme une tension sinusoïdale en une tension $u(t)$ nulle une alternance sur deux. Sur une demi-période $(0 ; T/2)$, cette tension redressée s'écrit $u(t) = U_{\text{max}} \sin(\omega t)$, avec $\omega = 2\pi/T$.

1. Calculer, en fonction de U_{max} et T , l'intégrale $\int_0^{T/2} u(t) dt$ (indication : une primitive de $\sin(\omega t)$ est $-(1/\omega)\cos(\omega t)$, cf. tableau de la section 2).
2. En déduire que la valeur moyenne de u sur $(0 ; T/2)$ vaut $U_{\text{moy}} = \frac{2}{\pi} U_{\text{max}}$ (résultat classique d'électronique de puissance).
3. Pour $U_{\text{max}} = 20 \text{ V}$, calculer U_{moy} arrondie au dixième de volt.

DÉFINITION — Valeur efficace d'une fonction

On appelle **valeur efficace** de f sur $[a ; b]$ le nombre réel positif :

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt}$$

C'est la « racine de la moyenne du carré » de f (en anglais RMS, root mean square). Contrairement à la valeur moyenne, la valeur efficace d'un signal alternatif pur n'est jamais nulle : c'est elle qui détermine, par exemple, l'échauffement produit par un courant dans une résistance, quelle que soit la forme du signal.

MÉTHODE — Intégrer un carré de sinussoïde — linéariser avec $\cos(2\theta)$

Pour intégrer $\cos^2(\omega t)$ ou $\sin^2(\omega t)$, on ne dispose d'aucune primitive directe : on linéarise d'abord à l'aide de la formule de duplication du cosinus :

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$$

Le membre de droite est une somme d'une constante et d'un cosinus : ses primitives se lisent directement dans les tableaux des sections 1 et 2.

APPLICATION CIRA — Valeur efficace d'un courant sinusoïdal · Défi CIRA

On considère le courant $i(t) = I_{\max} \cos(\omega t)$, de période $T = 2\pi/\omega$.

1. Exprimer $i(t)^2$ puis, à l'aide de la méthode ci-dessus, écrire $i(t)^2$ sous forme linéarisée (constante + terme en $\cos(2\omega t)$).
2. Calculer $\int_0^T i(t)^2 dt$ (indication : sur une période entière, l'intégrale du terme en $\cos(2\omega t)$ est nulle — sa courbe compte autant d'aire positive que négative).
3. En déduire que la valeur efficace de i vaut $I_{\text{eff}} = I_{\max}/\sqrt{2}$ (résultat à connaître : c'est lui qui relie la valeur affichée par un multimètre en mode AC, I_{eff} , à l'amplitude réelle du signal, $I_{\max}$).

REMARQUE — Signal périodique : un seul motif suffit

Quand f est périodique de période T , sa valeur moyenne et sa valeur efficace se calculent en intégrant sur **une seule période** — $(0 ; T)$ ou tout autre intervalle de largeur T , le résultat est le même par répétition du motif. Il est donc inutile d'intégrer sur toute la durée d'observation d'un signal périodique : cela ne change pas le résultat et complique inutilement le calcul.

6. Intégration par parties

THÉORÈME — Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$, telles que u' et v' soient elles-mêmes dérivables sur $[a ; b]$. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Démonstration. $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Deux fonctions égales ont des intégrales égales sur $[a ; b]$, d'où le résultat en intégrant chaque membre.

Exemple guidé. Calculer $I = \int_0^1 te^t dt$. On pose $u'(t) = e^t$, $u(t) = e^t$, $v(t) = t$, $v'(t) = 1$. D'où :

$$I = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

EXERCICE — Appliquer la formule d'intégration par parties · Consolidation

Calculer $I = \int_0^1 te^t dt$ en posant $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t$ (comme dans l'exemple ci-dessus).

EXERCICE — Une primitive de $\ln$ par intégration par parties · Approfondissement

Déterminer la primitive de $\ln(t)$ qui s'annule en 1, soit $F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$.

APPLICATION CIRA — Énergie associée à une puissance transitoire · Défi CIRA

Lors du démarrage d'un moteur, la puissance instantanée absorbée s'écrit, pour $t \geq 0$:

$$p(t) = P_0 \cdot t \cdot e^{-t/\tau}$$

avec $P_0 = 400 \text{ W}$ et $\tau = 0,5 \text{ s}$. L'énergie consommée entre les instants 0 et T est $W = \int_0^T p(t) dt$.

1. En posant $u'(t) = e^{-t/\tau}$ et $v(t) = t$, calculer $\int_0^T t \cdot e^{-t/\tau} dt$ par intégration par parties (une primitive de $e^{-t/\tau}$ est $-\tau \cdot e^{-t/\tau}$, cf. méthode de la section 2).
2. En déduire l'expression de $W(T)$, l'énergie consommée entre 0 et T .
3. Calculer $W(2)$ en joules, arrondi à l'unité.

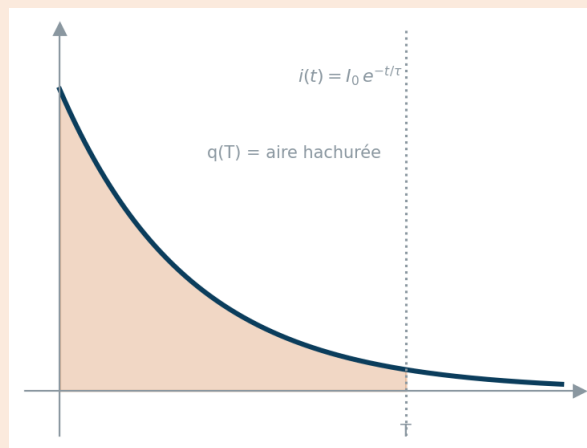
Application finale — Synthèse CIRA**APPLICATION CIRA — Charge et énergie lors de la décharge d'un condensateur**

Un condensateur se décharge dans une résistance R . Le courant qui circule s'écrit, pour $t \geq 0$ (t en secondes) :

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

avec $I_0 = 2 \text{ A}$, $\tau = 1,5 \text{ s}$ et $R = 10 \Omega$.

1. Déterminer une primitive de i , puis calculer la charge totale écoulee entre les instants 0 et T : $q(T) = \int_0^T i(t) dt$. Calculer $q(4)$ en coulombs, arrondi au centième.



2. L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance entre 0 et T est $W(T) = R \int_0^T i(t)^2 dt$. Exprimer $i(t)^2$, en déduire une primitive de $i(t)^2$ (forme $u'u^n$ de la section 2), puis calculer $W(T)$ en fonction de T .
3. Calculer $W(4)$ en joules, arrondi au centième. Comparer $W(4)$ à $W(T)$ quand T devient très grand ($T \rightarrow +\infty$) : que devient l'énergie totale dissipée ?
4. Calculer la valeur efficace du courant I_{eff} sur l'intervalle $[0 ; 4]$ (indication : reconnaître dans l'énoncé du 2. l'expression $\int_0^4 i(t)^2 dt$ déjà calculée). Ce résultat a-t-il un sens physique aussi net que pour un signal périodique établi comme en section 5 ? (un régime transitoire, qui s'éteint, n'a pas de valeur efficace « en régime permanent » à proprement parler — ce calcul reste néanmoins licite sur la durée finie choisie).