

BTS CIRA1 (2026-2027) — Mathématiques

Chapitre 08 — Équations différentielles

OUVERTURE — Pourquoi ce chapitre ?

Un niveau de liquide qui se stabilise après l'ouverture d'une vanne, un courant qui s'établit dans une bobine, une température qui évolue vers l'équilibre, une pièce qui oscille en s'amortissant sur un tapis roulant : toutes ces évolutions sont régies par une équation différentielle, c'est-à-dire une relation entre une fonction et sa (ou ses) dérivée(s). Résoudre cette équation, c'est prédire le comportement du système dans le temps — exactement ce que fait un régulateur industriel. Ce chapitre traite deux familles d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, du premier puis du second ordre, et se termine sur la notion centrale en Régulation Automatique de régime transitoire et de régime permanent. Exercices gradués : certains sont accessibles dès la maîtrise des exponentielles, d'autres demandent une résolution complète guidée par les indications de l'énoncé — comme dans un sujet de BTS.

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre — le cours

DÉFINITION — Équation différentielle linéaire du premier ordre, sans second membre

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre**, notée (E_0) , une équation de la forme :

$$ay' + by = 0$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x , dérivable, de fonction dérivée y' . Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions :

$$y_0(x) = Ke^{-(b/a)x}$$

où K est une constante réelle quelconque (une équation différentielle possède, sauf précision, une **infinité** de solutions).

DÉFINITION — Solution particulière et solution générale, avec second membre constant

On considère maintenant $(E) : ay' + by = c$, où c est une constante réelle (second membre constant). On procède en trois temps :

1. On cherche une **solution particulière** y_p de (E) — la plus simple possible, en général une **fonction constante** : comme y_p est constante, sa dérivée est nulle, et l'équation devient $by_p = c$, d'où $y_p = c/b$ (si $b \neq 0$).
2. Les **solutions générales** de (E) sont alors la somme de la solution générale sans second membre et de la solution particulière :

$$y = y_0 + y_p$$

3. Si une **condition initiale** est imposée, du type $y(x_0) = y_0$ (attention, ce y_0 désigne ici une valeur numérique donnée, pas la fonction sans second membre du 1.), elle permet de déterminer l'**unique** valeur de K correspondante : on obtient alors **LA** solution du problème, et non plus une famille de solutions.

MÉTHODE — Résoudre une équation différentielle linéaire du 1er ordre — exemple guidé

On veut résoudre l'équation différentielle (E) : $4y' - y = 10$ telle que $y(0) = 6$.

Étape 1 — sans second membre. $4y'(x) - y(x) = 0$: ici $a = 4$ et $b = -1$, donc $-b/a = 1/4$. Les solutions générales sont :

$$y_0(x) = Ke^{x/4}$$

Étape 2 — solution particulière. On cherche y_p constante, solution de $4y' - y = 10$. Comme y_p est constante, sa dérivée est nulle : $4 \times 0 - y_p = 10$, d'où $y_p = -10$.

Étape 3 — solution générale. $y(x) = Ke^{x/4} - 10$.

Étape 4 — condition initiale $y(0) = 6$. $Ke^0 - 10 = 6$, soit $K \times 1 - 10 = 6$, donc $K = 16$. LA solution vérifiant $y(0) = 6$ est donc :

$$y(x) = 16e^{x/4} - 10$$

EXERCICE — Résoudre une équation différentielle du premier ordre · Socle

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $5y' - 6y = 6$ sur $\mathbb{R}$, où y est une fonction de la variable x , dérivable, de dérivée y' .

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire (E_0) : $5y' - 6y = 0$.
2. Trouver la fonction constante f , solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 2$.

EXERCICE — Solution particulière affine (forme $At + B$) · Consolidation

On considère l'équation différentielle (E) du premier ordre : $2 \frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) = 9t - 12$, où x est une fonction de la variable t , dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $2 \frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) = 0$ (on retrouve ici la notation différentielle dx/dt , équivalente à $x'(t)$, très utilisée en sciences physiques).
2. Déterminer deux réels A et B tels que la fonction $f(t) = At + B$ soit une solution particulière de (E) (indication : calculer $f'(t)$, remplacer dans (E), puis identifier les coefficients de t et le terme constant de part et d'autre de l'égalité).
3. En déduire les solutions générales de (E).

EXERCICE — Vérifier une solution particulière donnée · Approfondissement

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $y' - y = -\frac{e^x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{**}$, où y est une fonction de la variable x , dérivable, de dérivée y' .

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire sans second membre associée à (E).
2. Vérifier que la fonction définie par $g(x) = \frac{e^x}{x}$ est une solution particulière de (E) (indication : calculer $g'(x)$ à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient, puis remplacer $g' - g$ dans le membre de gauche).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur $\mathbb{R}^{**}$.

2. Applications CIRA — équations du premier ordre

APPLICATION CIRA — Échauffement d'un conducteur par effet Joule · Consolidation

Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. On note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant t , exprimé en seconde, avec t variant dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

À l'instant $t = 0$ de la mise sous tension, la température du conducteur est celle du milieu ambiant, c'est-à-dire 18 degrés Celsius. Ainsi, on a $f(0) = 18$. Dans les conditions de l'expérience, la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,05y = 2$$

où y est une fonction inconnue de la variable t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,05y = 0$.

1. b. Vérifier que la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 40$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

1. c. En déduire les solutions définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).

2. On rappelle que la température initiale du conducteur est 18° Celsius. Ainsi, la fonction f exprimant la température du conducteur est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 18$. Déterminer alors une expression de la fonction f .

APPLICATION CIRA — Départ d'un wagon à sustentation magnétique (type Hyperloop) · Approfondissement

Plusieurs projets de train à très haute vitesse à propulsion électromagnétique sont en préparation. Les wagons ont une forme cylindrique et sont propulsés dans un tube à basse pression afin de réduire les frottements. Les ingénieurs ont fixé comme objectif impératif, pour le départ de chaque wagon, d'atteindre en moins de 2 minutes une vitesse instantanée de $400 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

On note $f(t)$ la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t en minute. On suppose que f est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 3]$. En appliquant les contraintes physiques et technologiques du projet, de premiers résultats conduisent à l'équation différentielle (E) :

$$y' - 0,2y = 3t$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y .

1. Résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) : $y' - 0,2y = 0$.

2. Vérifier que la fonction g , définie sur $[0 ; 3]$ par $g(t) = -15t - 75$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Au temps $t = 0$, le wagon est au point de départ. Déterminer la fonction f solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

3. Équations différentielles linéaires du second ordre — le cours

DÉFINITION — Équation différentielle linéaire du second ordre, sans second membre

Soient a , b et c trois réels, avec $a \neq 0$. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre**, notée (E_0) , une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

où y est une fonction inconnue, deux fois dérivable, y' et y'' ses fonctions dérivées première et seconde. On lui associe son **équation caractéristique** :

$$ar^2 + br + c = 0$$

de discriminant Δ . La nature des solutions de (E_0) dépend alors du signe de Δ , comme résumé ci-dessous (λ et μ désignant deux constantes réelles quelconques) :

Signe de Δ	Racines de l'équation caractéristique	Solutions générales sur $\mathbb{R}$
$\Delta > 0$	deux racines réelles distinctes r_1, r_2	$f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	une racine double réelle r	$f(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx}$
$\Delta < 0$	deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$	$f(x) = (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$

DÉFINITION — Solution particulière, avec second membre

On considère maintenant $(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$, où d est une fonction continue à valeurs réelles (souvent une fonction polynôme, une exponentielle, ou une fonction du type $\cos/\sin$ d'après le programme). On cherche une **solution particulière** y_p en suivant **la forme indiquée dans l'énoncé** (c'est une indication indispensable, sans laquelle le calcul serait hors de portée) : on injecte cette forme dans l'équation, puis on identifie les coefficients par comparaison. Les solutions générales de (E) sont alors, comme au premier ordre :

$$y = y_0 + y_p$$

Deux conditions initiales, du type $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$, sont nécessaires (et non plus une seule) pour déterminer les deux constantes λ et μ et obtenir LA solution unique du problème.

MÉTHODE — Résoudre une équation différentielle linéaire du 2nd ordre — exemple guidé

On veut résoudre $(E) : y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Étape 1 — sans second membre. Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0, \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, deux racines réelles : $r_1 = (3 - 1)/2 = 1$ et $r_2 = (3 + 1)/2 = 2$. D'où :

$$y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$$

Étape 2 — solution particulière. L'énoncé indique de chercher $g(x) = ax^2 + bx + c$ (un polynôme du même degré que le second membre). On calcule $g'(x) = 2ax + b$ et $g''(x) = 2a$, puis on remplace :

$$g'' - 3g' + 2g = 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c$$

En identifiant avec $8x^2 - 24x$ (terme constant nul), on trouve $a = 4, b = 0$ et $c = -4$, soit $g(x) = 4x^2 - 4$.

Étape 3 — solution générale. $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 4x^2 - 4$.

Étape 4 — conditions initiales. $y(0) = 0 : \lambda + \mu - 4 = 0$, donc $\lambda + \mu = 4$. Par ailleurs $y'(x) = \lambda e^x + 2\mu e^{2x} + 8x$

donc $y'(0) = 0 : \lambda + 2\mu = 0$. Le système $\{\lambda + \mu = 4 ; \lambda + 2\mu = 0\}$ donne, par soustraction, $\mu = -4$ puis $\lambda = 8$. LA solution vérifiant les conditions initiales est donc :

$$f(x) = 8e^x - 4e^{2x} + 4x^2 - 4$$

EXERCICE — Second membre exponentiel — solution particulière de la forme $ax^n e^x$ · *Approfondissement*

Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 4e^{-x}$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
(On admettra, et on pourra vérifier, que $f(x) = 2x^2 e^{-x}$ est une solution particulière.)

EXERCICE — Second membre sinusoïdal — racines complexes · *Défi CIRA*

On considère x la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable t , vérifiant l'équation différentielle : $x''(t) + 4x(t) = -6\sin(t)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + 4x(t) = 0$ (indication : ici $b = 0$, donc $\Delta < 0$ et les racines sont des imaginaires purs).
2. Vérifier que $g(t) = -2\sin(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle.
4. Déterminer la fonction x , solution de l'équation différentielle, vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$.

4. Applications CIRA — équations du second ordre

 APPLICATION CIRA — Régulateur de niveau — le régime permanent d'une régulation · *Défi CIRA*

Dans un régulateur de niveau, la hauteur de liquide varie en fonction du temps. On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) atteinte par le liquide à l'instant t (en heure). On suppose que h est une fonction de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$. Une étude mécanique montre que la fonction h est solution de l'équation différentielle :

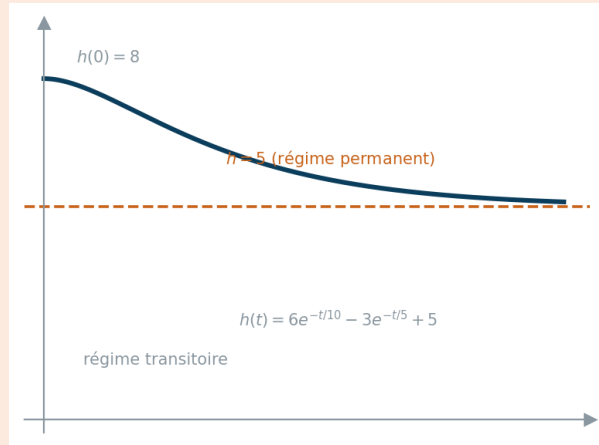
$$(E) : 10y'' + 3y' + 0,2y = 1$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10r^2 + 3r + 0,2 = 0$.
1. b. En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : 10y'' + 3y' + 0,2y = 0$ (on pourra s'appuyer sur le tableau de la section 3).
2. Vérifier que la fonction g , définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 5$, est une solution de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Les conditions initiales du système mécanique conduisent à poser $h(0) = 8$ et $h'(0) = 0$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de la fonction h :

$$h(t) = 6e^{-t/10} - 3e^{-t/5} + 5$$

Quelle est la hauteur du liquide au bout de deux heures ? Arrondir au dixième.



On retrouve, sur ce graphique, l'allure typique d'une réponse indicielle du premier ordre : un **régime transitoire** (la partie exponentielle, qui décroît vers 0) suivi d'un **régime permanent** (la valeur constante vers laquelle converge $h(t)$). C'est exactement ce que doit garantir une bonne régulation de niveau : une convergence rapide et sans oscillation excessive vers la consigne.

APPLICATION CIRA — Transfert d'une pièce sur un tapis roulant · Approfondissement

Sur une chaîne de montage, une pièce de 10 kg est située sur un plateau. On note $f(t)$ la cote (en mètres) du plateau à l'instant t (en secondes), calculée par rapport au sol. On suppose que f est une fonction de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$. L'objectif de l'exercice est d'étudier f afin de réaliser correctement le transfert de la pièce sur un tapis roulant. On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 5y' + 4y = 10$$

où y est une fonction de la variable x , définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 5r + 4 = 0$.
1. b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Un logiciel de calcul formel donne, pour la solution générale de (E), l'expression :

$$f(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-4x} + \frac{5}{2}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles. L'étude du système mécanique montre que f est la solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 5$ et $f'(0) = -1$. En utilisant ce résultat, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x (indication : calculer $f'(x)$, puis résoudre le système formé par $f(0) = 5$ et $f'(0) = -1$).

Application finale — Synthèse CIRA

REMARQUE — Régime transitoire, régime permanent, stabilité — le cœur de la Régulation Automatique

Dans tous les exemples de ce chapitre, la solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants se décompose en deux parties : la solution y_0 de l'équation sans second membre, et une solution particulière y_p . Or y_0 fait toujours intervenir des exponentielles e^{rx} (ou $e^{\alpha x}$ dans le cas complexe) construites sur les racines de l'équation caractéristique.

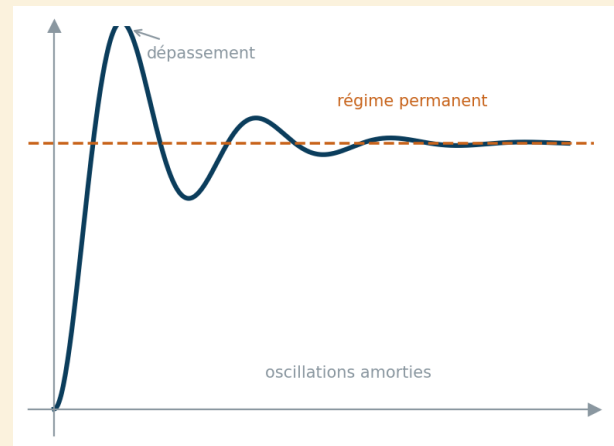
Si toutes ces racines ont une **partie réelle strictement négative** (comme $r_1 = -0,1$ et $r_2 = -0,2$ pour le régulateur de niveau, ou $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$ pour le tapis roulant), alors chaque terme exponentiel tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_0(t) = 0$$

si bien que la solution complète converge vers la seule solution particulière y_p : c'est le **régime permanent** du système, atteint après un **régime transitoire** qui s'éteint progressivement. Un système dont les racines caractéristiques ont toutes une partie réelle négative est dit **stable** — c'est la propriété la plus fondamentale que doit garantir tout dispositif de régulation industrielle : quel que soit l'état de départ, le système doit converger vers la consigne et non s'en éloigner.

Lorsque les racines sont complexes ($\Delta < 0$) mais de partie réelle α toujours négative, le régime transitoire est **oscillant amorti** : la sortie dépasse puis se rapproche du régime permanent en oscillant, comme sur le graphique classique de réponse indicielle d'un système du second ordre ci-dessous — un dépassement suivi d'oscillations amorties, jusqu'à stabilisation.

(Si en revanche une racine avait une partie réelle positive, ou si $\Delta < 0$ avec $\alpha = 0$ — cas de l'exercice $x'' + 4x = -6\sin(t)$ de la section 3, dont la partie sans second membre n'est ni amortie ni amplifiée — le régime transitoire ne s'éteindrait jamais : on dirait que le système est instable ou en oscillation entretenue, ce qu'un bon réglage de régulateur cherche justement à éviter.)



APPLICATION CIRA — Classer trois systèmes selon leur stabilité

À l'aide des racines de l'équation caractéristique trouvées dans les exercices de ce chapitre, classer chacun des trois systèmes suivants parmi les catégories : régime aperiodique stable (racines réelles négatives), régime oscillant amorti stable (racines complexes de partie réelle négative), ou oscillation entretenue non amortie (racines imaginaires pures).

1. Le régulateur de niveau de la section 4 (racines $-0,1$ et $-0,2$).
2. Le transfert de pièce sur tapis roulant de la section 4 (racines -1 et -4).
3. Le système $x''(t) + 4x(t) = -6\sin(t)$ de la section 3 (racines imaginaires pures $2i$ et $-2i$).
4. Conclure : lequel de ces trois systèmes ne reviendrait *jamais* spontanément au repos si on le perturbe, une fois le second membre supprimé ?