

OUVERTURE — Pourquoi ce chapitre ?

Un capteur numérique ne mesure pas un signal en continu : il l'échantillonne, c'est-à-dire qu'il en relève la valeur à intervalles réguliers T_e , produisant une liste de nombres $u_0, u_1, u_2, \dots$ indexée par le numéro du cycle. Un automate qui recalcule une commande à chaque tour de boucle, un contrôle qualité qui vérifie un lot après l'autre, un traitement chimique répété cuve après cuve : toutes ces situations discrètes se modélisent par une suite numérique. Conformément au programme officiel de BTS, aucune difficulté théorique n'est ici soulevée : on apprend à générer une suite, à reconnaître les cas arithmétique et géométrique, et à repérer expérimentalement — à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme — le seuil à partir duquel une suite s'approche d'une valeur limite. Ce chapitre referme le tronc commun de première année : le prochain thème, les nombres complexes, marque la frontière avec le programme de seconde année.

1. Suites numériques : définition et génération

DÉFINITION — Suite numérique

Une **suite numérique** (u_n) est une liste de nombres réels indexée par les entiers naturels : à chaque entier n , elle associe un nombre noté u_n , appelé **terme de rang n** . On note l'ensemble de ses termes (u_n) pour $n \in \mathbb{N}$ ou plus simplement (u_n) .

La **représentation graphique** d'une suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n ; u_n)$ — un nuage de points isolés, jamais une courbe continue (n n'a de sens que pour des valeurs entières).

Deux façons courantes de **générer** une suite :

- par une *formule explicite*, qui donne u_n directement en fonction de n ;
- par une *relation de récurrence*, qui donne le premier terme et une formule permettant de calculer chaque terme à partir du précédent (ou des précédents).

REMARQUE — Croissante, décroissante : une lecture graphique

On dit que (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n , et **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n . Conformément au programme, on se limite ici à une *approche graphique* : on lit le sens de variation sur un nuage de points ou un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice ou au tableur, sans chercher à le démontrer dans le cas général.

MÉTHODE — Exemple guidé — suite définie par une formule explicite

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 1}$$

On calcule, à la calculatrice ou au tableur : $u_0 = 3 ; u_1 = 2,5 ; u_2 \approx 2,33 ; u_3 = 2,25 ; u_4 = 2,2$. La suite semble décroissante et se rapprocher de la valeur 2 lorsque n devient grand — on peut le vérifier en calculant des termes de rang plus élevé ($u_{50} \approx 2,02$, par exemple).

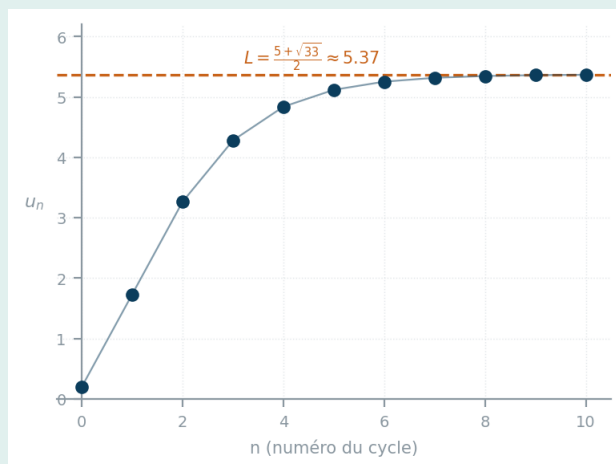
MÉTHODE — Exemple guidé — suite définie par une relation de récurrence

Un algorithme de régulation recalcule, à chaque cycle, le niveau prévu de consigne u_n (en cm) selon la relation :

$$u_0 = 0,2$$

puis, pour tout n :

$$u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 2}$$



Le graphique ci-dessus, obtenu en calculant successivement une dizaine de termes à l'aide d'un tableur, montre que la suite (u_n) semble se stabiliser autour de la valeur $L \approx 5,37$ cm.

REMARQUE — On constate, on ne démontre pas

Le programme officiel de BTS est explicite : « aucune difficulté théorique ne doit être soulevée » à propos des suites. La stabilisation observée ci-dessus se **constate** sur un tableau de valeurs ou un graphique — elle ne se démontre pas dans ce cours. C'est le même principe qui gouverne toute la notion de limite abordée en section 4.

EXERCICE — Lire une suite explicite sur un tableau · Socle

Une sonde de température, échantillonnée toutes les minutes lors du refroidissement d'une pièce mécanique venant de sortir d'un four, fournit une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 20 + \frac{30}{n+1}$$

où u_n est la température en °C relevée à la n -ième minute.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. La suite (u_n) semble-t-elle croissante ou décroissante ? Vers quelle valeur semble-t-elle se stabiliser (on pourra calculer u_{20} et u_{50} pour s'en convaincre) ?
3. Interpréter physiquement cette valeur de stabilisation.

EXERCICE — Itérer une relation de récurrence · Consolidation

Un correcteur numérique recalcule, à chaque cycle de régulation, la commande u_n à appliquer à un actionneur selon la relation de récurrence :

$$u_0 = 0$$

puis, pour tout n :

$$u_{n+1} = 0,5 \times u_n + 3$$

1. Calculer, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .
2. Vers quelle valeur L la suite (u_n) semble-t-elle se stabiliser ?
3. Vérifier par le calcul que cette valeur L vérifie l'équation $L = 0,5L + 3$ — c'est la condition pour que la suite reste « immobile » une fois la stabilisation atteinte.

2. Suites arithmétiques

DÉFINITION — Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel a , appelé **raison**, tel que pour tout n :

$$u_{n+1} = u_n + a$$

On passe d'un terme au suivant en *ajoutant toujours la même quantité* a . La représentation graphique d'une suite arithmétique est une série de points alignés sur une droite.

PROPRIÉTÉ — Terme général, sens de variation, somme

Pour tout n : $u_n = u_0 + n \times a$ (ou $u_n = u_1 + (n - 1) \times a$ si la suite débute au rang 1).

Sens de variation : si $a > 0$, (u_n) est strictement croissante ; si $a < 0$, elle est strictement décroissante ; si $a = 0$, elle est constante.

La somme de n termes consécutifs se calcule par la formule (donnée si nécessaire) :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

MÉTHODE — Exemple guidé — une pompe doseuse

Une pompe doseuse ajoute, à chaque cycle, un volume fixe de 15 mL dans une cuve qui contient déjà 50 mL. On note u_n le volume total (en mL) présent dans la cuve après n cycles : $u_0 = 50$ et $u_{n+1} = u_n + 15$. C'est une suite arithmétique de raison $a = 15$, donc $u_n = 50 + 15n$. Au bout de 10 cycles, le volume est $u_{10} = 50 + 150 = 200$ mL.

EXERCICE — Dosage incrémental · Socle

On reprend la pompe doseuse de l'exemple guidé : $u_0 = 50$ mL, raison $a = 15$ mL par cycle.

1. Justifier que (u_n) est arithmétique et donner sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer u_{20} .
3. La cuve a une capacité maximale de 500 mL. Au bout de combien de cycles ce volume est-il atteint ou dépassé (on cherchera à résoudre l'inéquation $50 + 15n \geq 500$) ?

EXERCICE — Volume total injecté · Consolidation

Une autre pompe, utilisée pour un traitement, injecte un volume qui croît de façon arithmétique d'un cycle à l'autre : elle injecte 20 mL au premier cycle, puis 5 mL de plus à chaque cycle suivant (raison $a = 5$). On note v_n le volume (en mL) injecté au n -ième cycle, pour $n \geq 1$.

1. Exprimer v_n en fonction de n , puis calculer v_{10} .
2. À l'aide de la formule de la somme de n termes consécutifs, calculer le volume total injecté au cours des 10 premiers cycles.
3. La cuve de récupération a une capacité de 400 mL. Sera-t-elle suffisante pour recueillir la totalité de ces 10 cycles ?

3. Suites géométriques

DÉFINITION — Suite géométrique

Une suite (u_n) , à termes non nuls, est **géométrique** s'il existe un réel $b \neq 0$, appelé **raison**, tel que pour tout n :

$$u_{n+1} = b \times u_n$$

On passe d'un terme au suivant en *multipliant toujours par la même quantité* b . Contrairement à la suite arithmétique (évolution linéaire), une suite géométrique décrit une évolution exponentielle — croissance ou décroissance de plus en plus rapide en valeur absolue.

PROPRIÉTÉ — Terme général, sens de variation, somme

Pour tout n : $u_n = u_0 \times b^n$ (ou $u_n = u_1 \times b^{n-1}$ si la suite débute au rang 1).

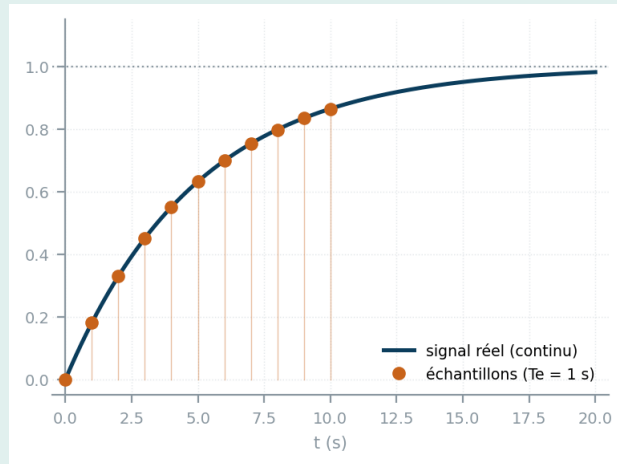
Si le premier terme est strictement positif : pour $b > 1$, (u_n) est strictement croissante ; pour $0 < b < 1$, elle est strictement décroissante ; pour $b = 1$, elle est constante.

La somme de n termes consécutifs se calcule par la formule (donnée si nécessaire) :

$$S = u_0 \times \frac{1 - b^{\text{nombre de termes}}}{1 - b}$$

MÉTHODE — Exemple guidé — échantillonner une charge : du continu au discret

Au chapitre 8, la charge d'un condensateur (système du premier ordre) obéissait à une loi continue du type $y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$, avec ici $\tau = 5$ s. On échantillonne ce signal toutes les $Te = 1$ s, et on note $e_n = 1 - y(n \times Te)$ l'écart relatif à la valeur finale au n-ième échantillon.



On a alors $e_n = e^{-nTe/\tau} = (e^{-Te/\tau})^n$ — une suite géométrique de raison $b = e^{-Te/\tau} = e^{-1/5} \approx 0,819$, et de premier terme $e_0 = 1$.

APPLICATION CIRA — Retrouver la règle des 63 % avec une suite géométrique

On reprend l'échantillonnage de l'exemple guidé : $e_n = e^{-n/5}$, suite géométrique de raison $b \approx 0,819$.

1. Calculer e_5 à 10^{-3} près (on prendra $e^{-1} \approx 0,368$).
2. En déduire le pourcentage de la valeur finale atteint après 5 échantillons, c'est-à-dire au bout de 5 secondes. Retrouve-t-on bien la « règle des 63 % » déjà rencontrée au chapitre 9 ?
3. Pourquoi cette coïncidence n'en est-elle pas une : que représente, en secondes, le nombre $5 \times Te$ dans ce contexte ?

EXERCICE — Rebuts en baisse après une action corrective · Consolidation

Après la mise en place d'une action corrective sur une ligne de production, le nombre de pièces rebutées décroît de 20 % à chaque lot contrôlé qui suit. Le premier lot analysé après l'action comptait encore $u_1 = 250$ pièces rebutées.

1. Justifier que (u_n) , pour $n \geq 1$, est géométrique et donner sa raison b.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4 , puis exprimer u_n en fonction de n.
3. À l'aide de la formule de la somme de n termes consécutifs, calculer (à la pièce près) le nombre total de pièces rebutées sur les 6 premiers lots suivant l'action corrective.

4. Limite d'une suite géométrique (approche expérimentale)

DÉFINITION — Seuil et limite : ce que dit le programme

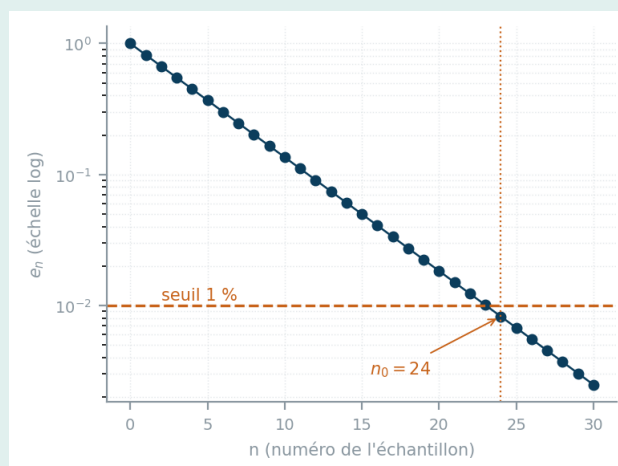
Le programme officiel de BTS demande, pour une suite géométrique (u_n) , de savoir **utiliser un tableur ou un algorithme** pour déterminer, lorsque c'est possible :

- un rang n_0 à partir duquel $u_n \geq a$, a étant un réel donné (cas $b > 1$) ;
- un rang n_0 à partir duquel $u_n \leq 10^{-p}$, p étant un entier naturel donné (cas $0 < b < 1$).

On approche ainsi *expérimentalement* la notion de limite : on ne cherche jamais à la démontrer dans ce cours, seulement à la constater et à en repérer le seuil sur un tableau de valeurs.

MÉTHODE — Exemple guidé — déterminer un seuil à l'aide d'un tableur

On reprend la suite $e_n = e^{-n/5}$ de la section 3 (écart, en proportion, à la valeur finale d'une charge de constante de temps $\tau = 5$ s, échantillonnée toutes les $Te = 1$ s). On cherche le rang n_0 à partir duquel $e_n \leq 0,01$ (écart inférieur à 1 %).



n	20	21	22	23	24
e_n	0,0183	0,0150	0,0123	0,0101	0,0082

Le tableau montre que $e_{23} > 0,01$ mais $e_{24} \leq 0,01$: le seuil de 1 % est franchi au rang $n_0 = 24$, soit après $24 \times 1 = 24$ s. On retrouve, à un cycle près, le critère empirique des « 5τ » ($5 \times 5 = 25$ s) déjà utilisé au chapitre 8 pour estimer qu'un système du premier ordre a atteint son régime permanent — 5τ est en réalité une valeur arrondie, un peu supérieure au seuil exact de 1 %.

APPLICATION CIRA — Retrouver le critère des 5τ à l'aide d'une suite géométrique

Approfondissement

Un autre capteur a pour constante de temps $\tau = 4 \text{ s}$ et est échantillonné toutes les $Te = 0,5 \text{ s}$. On pose, comme précédemment, $e_n = e^{-nTe/\tau}$, suite géométrique de raison $b = e^{-Te/\tau} = e^{-1/8} \approx 0,8825$. Un tableur a fourni les valeurs suivantes :

n	34	35	36	37	38
e_n	0,01426	0,01259	0,01111	0,00980	0,00865

1. À l'aide de ce tableau, déterminer le rang n_0 à partir duquel $e_n \leq 0,01$ (écart inférieur à 1 % de la valeur finale).
2. En déduire la durée $t = n_0 \times Te$ (en secondes) nécessaire pour atteindre ce seuil.
3. Comparer cette durée à $5\tau = 20 \text{ s}$. Le critère empirique des « 5τ » est-il, ici encore, une bonne approximation ?

EXERCICE — Un seuil de sécurité en dépollution · Socle · Consolidation

Une station de traitement réduit de 15 % la concentration en polluant à chaque cycle de filtration. La concentration initiale est $c_0 = 80 \text{ mg/L}$; la norme réglementaire impose une concentration inférieure ou égale à 5 mg/L en sortie.

1. Justifier que la suite (c_n) est géométrique, donner sa raison b , et calculer c_1, c_2 et c_3 (arrondies au dixième).
2. Un tableur donne, pour les cycles suivants : $c_{14} \approx 8,22$; $c_{15} \approx 6,99$; $c_{16} \approx 5,94$; $c_{17} \approx 5,05$; $c_{18} \approx 4,29 \text{ mg/L}$. Déterminer le nombre minimal de cycles de filtration nécessaires pour respecter la norme.

Application finale — Synthèse CIRA



APPLICATION CIRA — Simuler une équation différentielle par une suite : la méthode d'Euler

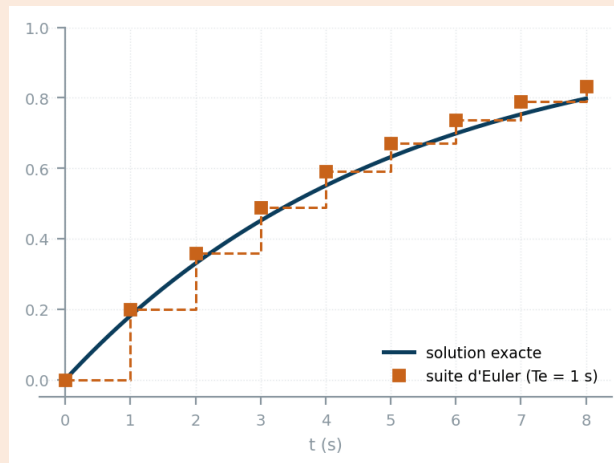
Défi CIRA

Au chapitre 8, la charge d'un système du premier ordre obéissait à l'équation différentielle $y' = \frac{1-y}{\tau}$, $y(0) = 0$, de solution exacte $y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$. Or un automate ou un microcontrôleur ne « résout » jamais une équation différentielle : il en calcule une valeur *approchée*, pas à pas, à intervalles réguliers Te , à l'aide d'une suite récurrente — c'est la **méthode d'Euler** :

$$y_{n+1} = y_n + Te \times \frac{1 - y_n}{\tau}$$

La suite (y_n) ainsi construite approche les valeurs $y(n \times Te)$ de la solution exacte, sans jamais résoudre l'équation différentielle elle-même — c'est un calcul pas à pas, exactement ce que peut effectuer un automate. On prend $\tau = 5 \text{ s}$, $Te = 1 \text{ s}$ et $y_0 = 0$.

1. Calculer, à l'aide de la relation de récurrence, y_1, y_2 et y_3 .
2. La solution exacte donne $y(1) \approx 0,181$, $y(2) \approx 0,330$ et $y(3) \approx 0,451$ (à 10^{-3} près). Comparer avec y_1, y_2 et y_3 . La méthode d'Euler surestime-t-elle ou sous-estime-t-elle ici la valeur exacte ?



3. En observant le graphique ci-dessus (suite d'Euler en escalier, solution exacte en trait continu), quel effet aurait, selon vous, une diminution de la période d'échantillonnage Te — par exemple $Te = 0,1 \text{ s}$ au lieu de 1 s — sur la qualité de l'approximation ? (aucun calcul n'est demandé : on argumentera à partir du principe même de la méthode).
4. Conclure, en une phrase, sur le lien entre suites numériques, équations différentielles et simulation numérique en Automatique.