

BTS CIRA1 (2026-2027) — Mathématiques

Chapitre 11 — Nombres complexes

OUVERTURE — Pourquoi ce chapitre ?

Les premiers éléments sur les nombres complexes ont été vus au lycée ; ce chapitre les complète pour en faire un outil de l'ingénieur, comme le prévoit le programme officiel de BTS CIRA. En électricité, une impédance se calcule avec des nombres complexes ; en Automatique, une fonction de transfert $H(j\omega)$ — qui décrit comment un système réagit à un signal sinusoïdal de pulsation ω — est elle-même un nombre complexe dont le module et l'argument donnent le gain et le déphasage d'un diagramme de Bode ou de Nyquist. Convention à retenir dès maintenant : dans tout ce chapitre, comme dans l'enseignement technologique, on note j le nombre tel que $j^2 = -1$ plutôt que i , la lettre i étant déjà réservée à l'intensité électrique. Ce chapitre marque la frontière entre la première et la seconde année de BTS CIRA : il referme le tronc commun de première année, et prépare les séries de Fourier et la transformation de Laplace du programme de seconde année, qui reposent toutes deux sur les nombres complexes. En clôture, on reprendra une dernière fois le système du premier ordre étudié aux chapitres 8, 9 et 10, pour l'observer sous un tout nouvel angle : sa réponse fréquentielle.

1. Nombres complexes : forme algébrique et représentation géométrique

DÉFINITION — Nombre complexe, notation j

On admet l'existence d'un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et un nombre noté j (on aurait pu le noter i , mais *en électronique et en Automatique, la lettre i est déjà réservée à l'intensité électrique* — le programme officiel de BTS le signale explicitement) tel que $j^2 = -1$. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous **forme algébrique** :

$$z = a + jb$$

où a et b sont des réels : a est appelé **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$, et b est appelé **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$ — attention, $\text{Im}(z)$ est le réel b , pas jb .

Si $b = 0$, z est réel ; si $a = 0$ (et $b \neq 0$), z est dit *imaginaire pur*.

PROPRIÉTÉ — Opérations sur les nombres complexes

Soit $z = a + jb$ et $z' = a' + jb'$ deux nombres complexes (a, b, a', b' réels). On calcule avec les nombres complexes comme avec les nombres réels, en remplaçant j^2 par -1 dès qu'il apparaît :

- somme : $z + z' = (a + a') + j(b + b')$;
- produit : $z \times z' = (aa' - bb') + j(ab' + a'b)$;
- conjugué : on note **conj(z)** (traditionnellement noté aussi $\bar{z}$ surmonté d'une barre) le **conjugué** de z : $\text{conj}(z) = a - jb$. Le point d'affixe $\text{conj}(z)$ est le symétrique de celui d'affixe z par rapport à l'axe des réels ;
- quotient : on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\text{conj}(z')$, ce qui rend le dénominateur réel puisque $z' \times \text{conj}(z') = a'^2 + b'^2$.

MÉTHODE — Exemple guidé — calculs algébriques

Soit $z_1 = 2 + 3j$ et $z_2 = 1 + j$.

Somme : $z_1 + z_2 = 3 + 4j$.

Produit : $z_1 \times z_2 = (2 + 3j)(1 + j) = 2 + 2j + 3j + 3j^2 = 2 + 5j - 3 = -1 + 5j$.

Conjugué : $\text{conj}(z_1) = 2 - 3j$.

Quotient (on multiplie par $\text{conj}(z_2) = 1 - j$) :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 3j)(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)} = \frac{2 + j + 3}{2} = 2,5 + 0,5j$$

EXERCICE — Calculs algébriques de base · Socle

On donne $z_1 = 4 - j$ et $z_2 = -2 + 3j$. Calculer, sous forme algébrique :

1. $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.
2. $z_1 \times z_2$.
3. $\text{conj}(z_2)$, le conjugué de z_2 .

PROPRIÉTÉ — Équation du second degré à coefficients réels : le cas $\Delta < 0$

Pour une équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients réels a, b, c ($a \neq 0$), on calcule comme au lycée le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les solutions réelles usuelles. Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

MÉTHODE — Exemple guidé — racines complexes conjuguées

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ ($a = 1, b = -4, c = 13$).

Discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36$, donc $\Delta < 0$: deux solutions complexes conjuguées.

Comme $-\Delta = 36$ et $\sqrt{36} = 6$, on obtient :

$$z = \frac{4 \pm j6}{2} = 2 \pm 3j$$

Les deux solutions, $2 + 3j$ et $2 - 3j$, sont conjuguées l'une de l'autre : elles se représentent par deux points symétriques par rapport à l'axe des réels (voir la représentation géométrique ci-dessous).

EXERCICE — Racines complexes d'une équation du second degré · Consolidation

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 10 = 0$ (on calculera d'abord le discriminant Δ).

APPLICATION CIRA — Retrouver le régime oscillant amorti du chapitre 8 · Approfondissement

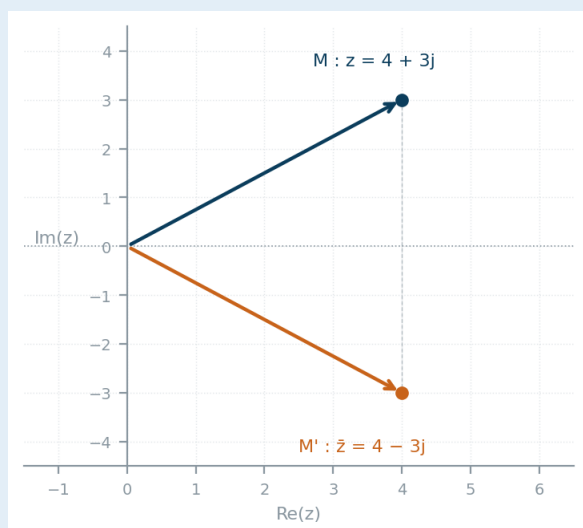
Au chapitre 8, un système de régulation vérifiant une équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d(t)$ admettait, lorsque le discriminant de son équation caractéristique était négatif, un *régime oscillant amorti* — un fait admis à l'époque, faute de savoir résoudre une équation du second degré à discriminant négatif. On peut maintenant le vérifier.

On considère un système dont l'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 13 = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ , puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
2. Les deux solutions s'écrivent sous la forme $\alpha \pm j\omega$. Identifier les valeurs de α (le taux d'amortissement) et ω (la pseudo-pulsation, en rad/s).
3. Le signe de α gouverne le comportement du système : pourquoi un α négatif correspond-il à un régime qui s'amortit (et non qui s'amplifie) au cours du temps ?

DÉFINITION — Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans un repère orthonormé du plan, appelé **plan complexe** (axe des réels horizontal, axe des imaginaires vertical), on associe à tout nombre complexe $z = a + jb$ un unique point $M(a ; b)$, appelé *image* de z ; réciproquement, z est appelé **affixe** du point M (ou du vecteur OM).



Le point d'affixe $\text{conj}(z)$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des réels — illustré ci-dessus avec $z = 4 + 3j$ et $\text{conj}(z) = 4 - 3j$.

REMARQUE — En instrumentation : l'affixe d'une impédance

En électricité, l'impédance complexe d'une bobine associée à une résistance s'écrit $Z = R + jL\omega$, où R est la résistance (Ω), L l'inductance (H) et ω la pulsation du signal (rad/s). Pour $R = 50 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$ et $\omega = 100 \text{ rad/s}$, on a $L\omega = 20 \Omega$ donc $Z = 50 + j20$ — représenté par le point (50 ; 20) dans le plan complexe.

REMARQUE — Ensembles de points

On peut aussi décrire un ensemble de points par une condition sur l'affixe : par exemple, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\operatorname{Re}(z) = 3$ est la droite verticale d'équation $x = 3$, et l'ensemble des points tels que $\operatorname{Im}(z) = -2$ est la droite horizontale d'équation $y = -2$.

2. Forme trigonométrique et forme exponentielle

DÉFINITION — Module et argument d'un nombre complexe

Soit $z = a + jb$ un nombre complexe non nul, d'image M dans le plan complexe. On appelle **module** de z , noté $|z|$, la longueur OM ; on note souvent $r = |z|$. On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, une mesure en radians de l'angle (axe des réels ; OM) — défini à 2π près.

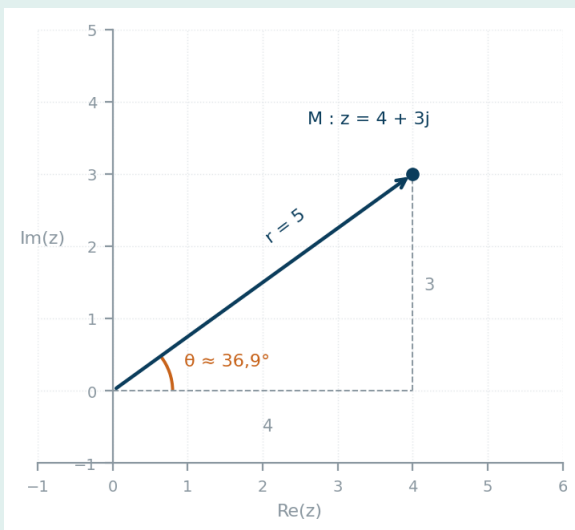
On en déduit deux nouvelles écritures de z , avec $\theta = \arg(z)$:

- forme trigonométrique : $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$;
- forme exponentielle : $z = re^{j\theta}$ (notation d'Euler, admise).

MÉTHODE — Exemple guidé — de la forme algébrique à la forme exponentielle

Reprenons $z = 4 + 3j$ (section précédente). Son module est

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



et son argument θ vérifie $\cos \theta = 4/5$ et $\sin \theta = 3/5$, soit, à la calculatrice, $\theta \approx 36,9^\circ (\approx 0,644 \text{ rad})$. On obtient la forme trigonométrique $z = 5(\cos \theta + j \sin \theta)$ et la forme exponentielle

$$z = 5e^{j\theta} \text{ avec } \theta \approx 36,9^\circ$$

MÉTHODE — Exemple guidé — de la forme exponentielle à la forme algébrique

Convertissons $z = 2e^{j\pi/3}$ en forme algébrique. On sait que $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc :

$$z = 2 \times \frac{1}{2} + j \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + j\sqrt{3}$$

EXERCICE — Module et argument de nombres complexes simples · Socle

Pour chacun des nombres complexes suivants, calculer le module r et une valeur de l'argument θ (en degrés), puis donner la forme exponentielle correspondante :

1. $z = 1 + j\sqrt{3}$;
2. $z = -3$;
3. $z = 2j$.

PROPRIÉTÉ — Produit et quotient : modules et arguments

Pour deux nombres complexes non nuls z et z' , le module d'un produit est le produit des modules et l'argument d'un produit est la somme des arguments (à 2π près) : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$.

De même pour un quotient : $|z / z'| = |z| / |z'|$ et $\arg(z / z') = \arg(z) - \arg(z')$. C'est cette propriété qui rend la forme exponentielle particulièrement pratique pour multiplier ou diviser des nombres complexes.

EXERCICE — Produit et quotient en forme exponentielle · Consolidation

On donne $z_1 = 3e^{j\pi/3}$ et $z_2 = 2e^{j\pi/6}$.

1. Calculer le module et un argument de $z_1 \times z_2$, puis donner sa forme exponentielle.
2. Calculer le module et un argument de z_1 / z_2 , puis donner sa forme exponentielle.

APPLICATION CIRA — Gain en décibels et déphasage d'un système · Application CIRA

En Automatique, le comportement d'un système en régime sinusoïdal est décrit par une fonction de transfert complexe $H(j\omega)$, où ω est la pulsation (en rad/s). En notant $r(\omega) = |H(j\omega)|$ son module, on définit le **gain en décibels** et le **déphasage** du système :

$$G(\omega) = 20 \log_{10}(r(\omega)) \text{ (en dB)} \quad \phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

On considère $H(j\omega) = \frac{10}{2 + j\omega}$ à la pulsation $\omega = 2 \text{ rad/s}$.

1. Écrire $2 + j2$ sous forme exponentielle (module et argument).
2. En déduire $r(2)$ et $\phi(2)$.
3. Calculer $G(2)$ en décibels, arrondi au dixième.

3. Transformations géométriques d'écritures complexes

DÉFINITION — Quatre transformations à connaître

Le programme officiel en cite quatre, toujours associées à l'image d'un point ou d'une droite dans le plan complexe (on utilise en pratique un logiciel de géométrie dynamique pour les visualiser, sans qu'aucune démonstration ne soit exigée) :

- $z \mapsto z + b$ — translation de vecteur d'affixe b ;
- $z \mapsto az$ (a réel) — homothétie de rapport a ;
- $z \mapsto 1/z$ — inversion ;
- $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ — transformation homographique (cas particulier du précédent).

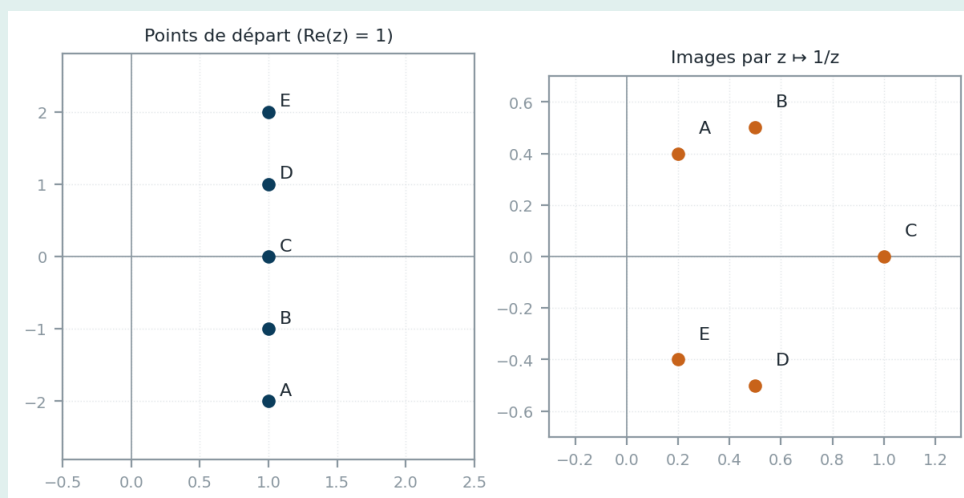
MÉTHODE — Exemple guidé — images de deux points

Soit A d'affixe $3 + 2j$. Son image par $z \mapsto 2z - 1$ a pour affixe :

$$2 \times (3 + 2j) - 1 = 6 + 4j - 1 = 5 + 4j$$

Soit B d'affixe $1 + j$. Son image par $z \mapsto 1/z$ a pour affixe (en multipliant par le conjugué du dénominateur) :

$$\frac{1}{1 + j} = \frac{1 - j}{2} = 0,5 - 0,5j$$



Le graphique ci-dessus montre cinq points A, B, C, D, E de la droite $\text{Re}(z) = 1$ — le point D, d'affixe $1 + j$, est le point B de cet exemple — et leurs images par $z \mapsto 1/z$. On constate, sans le démontrer, que les cinq images semblent alignées sur un même arc de cercle.

🔗 APPLICATION CIRA — Le lieu de Nyquist : une transformation au service de l'Automatique

Le programme officiel signale explicitement l'usage de ces transformations pour les *diagrammes de Nyquist ou de Bode* en électronique. Pour une fonction de transfert complexe $H(j\omega)$, le **lieu de Nyquist** est l'ensemble des points d'affixe $H(j\omega)$ obtenus lorsque la pulsation ω varie de 0 à $+\infty$. On le construit *point par point*, à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur — jamais par une démonstration théorique — en calculant $H(j\omega)$ pour plusieurs valeurs de ω , comme dans les deux exercices qui suivent.

EXERCICE — Images de points par des transformations données · Socle · Consolidation

Calculer l'affixe de l'image de chacun des points suivants par la transformation indiquée :

1. M d'affixe $2 + j$, par $z \mapsto z + (-3 + 2j)$ (translation).
2. N d'affixe $4j$, par $z \mapsto 3z$ (homothétie).
3. P d'affixe $2 - j$, par $z \mapsto 1/z$ (inversion).

APPLICATION CIRA — Construire quelques points d'un lieu de Nyquist · Approfondissement

On considère la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$.

1. Calculer l'affixe de $H(j\omega)$ pour $\omega = 0$, $\omega = 2 \text{ rad/s}$ et $\omega = 4 \text{ rad/s}$ (chaque résultat sera donné sous forme algébrique).
2. Placer, dans le plan complexe, les trois points ainsi obtenus.
3. En observant leur position, quelle courbe semblent-ils esquisser ? (aucune démonstration n'est demandée)

Application finale — Synthèse CIRA



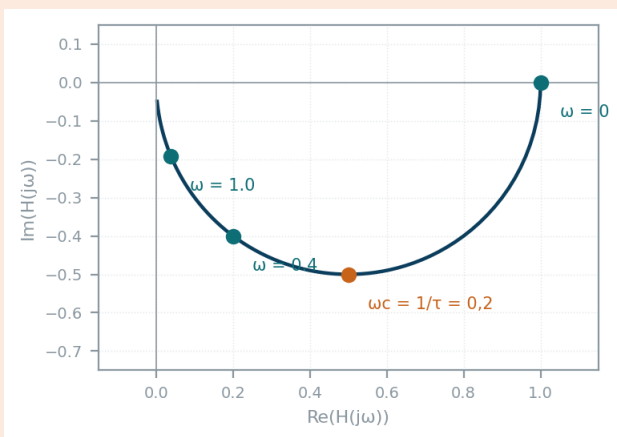
APPLICATION CIRA — Le lieu de Nyquist du système du premier ordre : clôture du tronc CIRA1

Défi CIRA

Depuis le chapitre 8, un même système du premier ordre — de constante de temps $\tau = 5\text{ s}$ — a traversé trois chapitres sous trois angles différents : l'équation différentielle $y' = \frac{1-y}{\tau}$ (chapitre 8), le développement limité de sa réponse $y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ au voisinage de 0 (chapitre 9), et la suite géométrique obtenue en l'échantillonnant (chapitre 10). Les nombres complexes permettent d'en étudier un **quatrième** aspect : sa réponse fréquentielle, décrite par la fonction de transfert complexe :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 5j\omega}$$

1. Calculer l'affixe de $H(j\omega)$ sous forme algébrique pour $\omega = 0$, $\omega = 0,2\text{ rad/s}$, $\omega = 0,4\text{ rad/s}$ et $\omega = 1\text{ rad/s}$.



Le graphique ci-dessus, complété point par point, laisse deviner un demi-cercle — c'est effectivement le lieu de Nyquist de tout système du premier ordre, un résultat que l'on admet ici sans démonstration.

2. Vérifier que, pour $\omega = \omega_c = 1/\tau = 0,2\text{ rad/s}$, le module de $H(j\omega)$ vaut $1/\sqrt{2} \approx 0,707$, soit un gain d'environ -3 dB .
3. Ce point particulier porte un nom bien connu en Automatique : la **pulsation de coupure**. Quel lien reconnaissez-vous avec la constante de temps τ , déjà rencontrée aux chapitres 8, 9 et 10 ?
4. Conclure, en une phrase, sur ce que les nombres complexes apportent à l'étude des systèmes en Automatique — et sur le lien entre ce chapitre et les enseignements de seconde année (séries de Fourier, transformation de Laplace) qui s'appuient tous deux sur les nombres complexes.