Travail maison

Mélanie s'est blessée la cheville donc elle ne peut marcher. Elle veut se rendre chez son amie Samira dans la ville voisine et décide de faire du stop. Voulant minimiser les situations dangereuses elle décide de se déguiser. La probabilité qu'ainsi accoutrée une voiture qui passe par là s'arrête est de 5%.

1) Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire X dont donnerez la loi.
2) Sous ce genre de condition, si ça devait se reproduire un grand nombre de fois combien de voiture devrait-elle voir passer avant que quelqu'un ne s'arrête.
3) Quelle est la probabilité pour qu'au moins dix voitures la dépassent sans la prendre ? (Pour cette question comme pour les suivantes il va bien falloir réfléchir au symbole à utiliser : l'inégalité sera-t-elle stricte ou large)
4) Quelle est la probabilité pour que moins de 15 voitures passent sans la prendre ?
5) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit prise entre la cinquième et la douzième.
6) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit dépassée par au moins 35 voitures sachant que déjà 15 lui soient passé devant sans la prendre.

Mélanie discute avec Samira et lui demande combien de voiture va-t-elle voir la dépasser au maximum avant qu'une la prenne. Elle veut être sûre à 100%. Samira lui dit qu'on ne peut savoir, car il est tout à fait possible qu'elle attende longtemps et que même la 1000ème voiture lui passe devant sans la prendre.

7) Qu'en pensez-vous ? est-ce que l'éventualité évoquée par Samira vous semble probable ? Justifiez à l'aide d'un calcul.
8) Devant le résultat obtenu, Mélanie accepte de réviser ses attentes à la baisse. Elle accepte de n'être sûre qu'à 99%. Trouver une inéquation donnant n le rang d'un nombre de voiture dépassée telle que la probabilité d'avoir été ramassée par la nième ou avant soit supérieur ou égal à 99%.
9) Ne sachant résoudre cette inéquation avec les moyens du bord, écrire un programme en python permettant de trouver la valeur de n.
10) Quelle réponse donne votre programme ?

Pour les motivés :

note supplémentaire facultative
(ne peut qu'améliorer votre moyenne)

Démonstration de la formule : $P_{X>k}(X > n + k) = P(X > n)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) En vous servant d'une des formules vues en classe déterminer $P(X > k)$, puis $P(X > n)$ et $P(X > n + k)$ en fonction de p, n et k.
2) Traduire $P_B(A)$ en fonction de $P(A \cap B)$ et de ….
3) En déduire une écriture de $P_{X>k}(X > n + k)$ sous forme de quotient
4) Expliquer pourquoi $(X > 5) \cap (X > 12) = (X > 12)$
5) En déduire une écriture simplifiée du numérateur du quotient de la question 3)
6) En déduire une expression de $P_{X>k}(X > n + k)$ en fonction de p ,n et k.
7) Après avoir simplifié le quotient donner une probabilité simple égale à $P_{X>k}(X > n + k)$.

Correction : Travail maison

Mélanie s'est blessée la cheville donc elle ne peut marcher. Elle veut se rendre son amie Samira dans la ville voisine et décide de faire du stop. Voulant minimiser les situations dangereuses elle décide de se déguiser. La probabilité qu'ainsi accoutrée une voiture qui passe par là s'arrête est de 5%.

1) Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire dont donnerez la loi.

On répète jusqu'à l'obtention d'un succès la même épreuve de Bernoulli à deux issues : une réussite « être prise en auto-stop » de probabilité $p = 0{,}05$ et un échec « ne pas être prise par la voiture qui passe. » ainsi X la variable aléatoire donnant le numéro de la voiture qui prend Mélanie en stop suit une loi géométrique de raison $p = 0{,}05$.

2) Sous ce genre de condition, si ça devait se reproduire un grand nombre de fois combien de voiture devrait-elle voir passer avant que quelqu'un ne s'arrête.

$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}05} = 20$. En moyenne elle est prise par la 20ème voiture, donc 19 vont passer sans la prendre.

3) Quelle est la probabilité pour qu'au moins dix voitures la dépassent sans la prendre ?

$P(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$ donc la probabilité pour qu'au moins dix voitures la dépasse sans la prendre est $P(X \geq 11) = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{11-1} = 0{,}95^{10}$

4) Quelle est la probabilité pour que moins de 15 voitures passent sans la prendre ?

Moins de 15 voitures passent sans la prendre veut dire 14 échecs ou moins, donc la réussite est en 15ème position ou avant, ainsi on veut :

$$P(X \leq 15) = 1 - (1-p)^k = 1 - 0{,}95^{15}$$

5) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit prise entre la cinquième et la douzième.

On veut $P(5 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}95^{12} - (1 - 0{,}95^4)$ $= 0{,}95^4 - 0{,}95^{12}$

6) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit dépassée par au moins 35 voitures sachant que déjà 15 lui soient passé devant sans la prendre.

$P_{X>k}(X > n+k) = P(X > n)$ donc :

$P_{X>15}(X > 35) = P_{X>15}(X > 20+15) = P(X > 20) = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{20} = 0{,}95^{20}$

Mélanie discute avec Samira et lui demande combien de voiture va-t-elle voir la dépasser au maximum avant qu'une la prenne. Elle veut être sûre à 100%. Samira lui dit qu'on ne peut savoir, car il est tout à fait possible que 1000 voitures lui passent devant sans la prendre.

7) Qu'en pensez-vous ? est-ce que l'éventualité évoquée par Samira vous semble probable ? Justifiez à l'aide d'un calcul.

Exactement 1000 voitures la passent : $P(X = 1001) = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{1000} \frac{5}{100} \approx 2{,}65 \times 10^{-24}$

Au moins 1000 la passent : $P(X > 1000) = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{1000} = 0{,}95^{1000} \approx 5{,}29 \times 10^{-23}$

Dans les deux cas c'est très peu probable.

8) Devant le résultat obtenu, Mélanie accepte de réviser ses attentes à la baisse. Elle accepte de n'être sûre qu'à 99%. Trouver une inéquation donnant n le rang d'un nombre de voiture dépassée telle que la probabilité d'avoir été ramassée par la nième ou avant soit supérieur ou égal à 99%.

$P(X \leq n) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}95^n \geq 0{,}99$

9) Ne sachant résoudre cette inéquation avec les moyens du bord, écrire un programme en python permettant de trouver la valeur de n.

```
n=1
while 1-0.95**n<0.99 :
        n=n+1
print(n)
```

10) réponse : 90 voitures

Pour les motivés :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) En vous servant d'une des formules vues en classe déterminer …

$P(X > k) = (1-p)^k$, $P(X > n) = (1-p)^n$ et $P(X > n+k) = (1-p)^{n+k}$

2) Traduire $P_B(A)$ en fonction de $P(A \cap B)$ et de ….

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3) En déduire une écriture de $P_{X>k}(X > n+k)$ sous forme de quotient

$$P_{X>k}(X > n+k) = \frac{P\big((X > k) \cap (X > n+k)\big)}{P(X > k)}$$

4) Expliquer pourquoi $(X > 5) \cap (X > 12) = (X > 12)$

Si $X > 12$ alors $X > 5$ donc la condition $(X > 5)$ ne change rien à $(X > 12)$

5) En déduire une écriture simplifiée du numérateur du quotient de la question 3)

$P\big((X > k) \cap (X > n+k)\big) = P(X > n+k)$

6) En déduire une expression de $P_{X>k}(X > n+k)$ en fonction de p ,n et k.

$$P_{X>k}(X > n+k) = \frac{P(X > n+k)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n}$$

7) Après avoir simplifié le quotient donner une probabilité simple égale à $P_{X>k}(X > n+k)$.

$$P_{X>k}(X > n+k) = (1-p)^{n+k-n} = (1-p)^k = P(X > k)$$

Ainsi : $$\boldsymbol{P_{X>k}(X > n + k) = P(X > k)}$$

Après 5 lancers d'un dé équilibré, aucun 6 n'est sorti.
La probabilité qu'aucun 6 ne sorte avant le 12e lancer est égale à la probabilité qu'aucun 6 ne sorte sur les 7 prochains lancers.
$P_{X>5}(X = 12) = P_{X>5}(X > 7 + 5) = P(X > 7)$
On « oublie » le fait qu'aucun 6 ne soit sorti sur les 5 premiers lancers, on repart de 0 et on s'intéresse aux 7 prochains lancers.